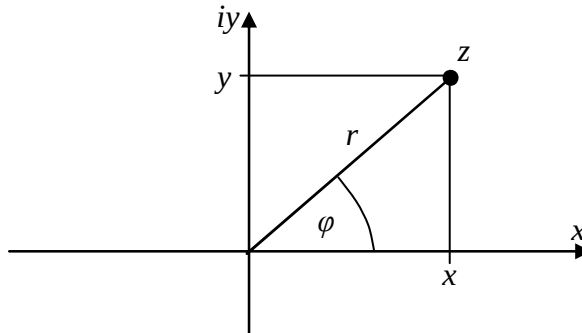


Komplex függvénytan

Komplex számok, komplex aritmetika



Jelölje R a valós, C a komplex számok halmazát! Egy $z \in C$ komplex szám a komplex számsík egy pontját jelöli, leírásához két valós számérték tartozik, például x és y Descartes koordináták, vagy r és φ polárkoordináták ($x, y, r, \varphi \in R$). Ezekkel $z = x + iy = re^{i\varphi}$. Mivel $x = r \cos \varphi$; $y = r \sin \varphi$, a kétféle felírásból $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$.

A $z = x + iy = re^{i\varphi}$ komplex szám konjugáltja $\bar{z} = x - iy = re^{-i\varphi}$.

Két komplex szám, z és w szorzata: $z \cdot w = (x + iy)(u + iv) = xu - yv + i(yu + xv)$, illetve $z \cdot w = re^{i\varphi} \cdot \rho e^{i\psi} = r\rho \cdot e^{i(\varphi+\psi)}$.

Áttekintjük a legegyszerűbb **komplex algebrai** $w = f(z)$ **függvényeket**

Komplex szám és konjugáltjának szorzata: $z \cdot \bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2 = |z|^2$.

Innen egy z komplex szám reciproka: $w = \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{1}{re^{i\varphi}} = \frac{1}{r} e^{-i\varphi}$, ami az egységkörre való

inverziót ($r \rightarrow \frac{1}{r}$) és a valós tengelyre való tükrözést ($\varphi \rightarrow -\varphi$) jelenti.

Hatvány: $w = z^2 = z \cdot z = (x + iy)(x + iy) = x^2 - y^2 + i2xy = (re^{i\varphi})^2 = r^2 e^{i2\varphi}$. Általában is igaz: $w = z^n = r^n e^{in\varphi}$, ami a z komplex szám abszolút értékének nyújtását (ha abszolút értéke nagyobb 1-nél, illetve ellenkező esetben zsugorítását), valamint polárszögének n -szeresére történő elforgatását jelenti.

A $w = a + iz$; $a \in C$ nyilván a -val való eltolást jelent a komplex síkon.

Négyzetgyök, mint $1/2$ -edik hatvány értelmezhető, $w = \sqrt{z} = \sqrt{r} e^{i\frac{\varphi}{2}}$

Komplex $a \in C$ számmal való szorzás nyújtást és elforgatást jelent, ami a polárkoordinátás felírásból nyilvánvaló: $w = a \cdot z = |a| e^{i\psi} \cdot re^{i\varphi} = |a| re^{i(\varphi+\psi)}$.

Valós $a \in R$ számmal való szorzás csak nyújtást jelent, $w = az = ar e^{i\varphi}$.

Két síkvektor skalár szorzatának komplex megfelelője

Legyen a két síkvektor a és b , komponenseikkel adva: $a = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix}$. Ezek skalár szorzata

$$a \cdot b = a_x b_x + a_y b_y.$$

A vektor komponensekkel felírt komplex számok $a = a_x + ia_y$ és $b = b_x + ib_y$. Számítsuk ki a és $\bar{b}$ szorzatát!

$$a \cdot \bar{b} = (a_x + ia_y)(b_x - ib_y) = a_x b_x + a_y b_y + i(-a_x b_y + a_y b_x) = \operatorname{Re}\{a \cdot \bar{b}\} + i \cdot \operatorname{Im}\{a \cdot \bar{b}\}.$$

Eszerint a skalár szorzat: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \operatorname{Re}\{a \cdot \bar{b}\}$. A képzetes rész pedig akkor 0, ha $a_x b_y = a_y b_x$, azaz

$$\frac{a_x}{a_y} = \frac{b_x}{b_y}, \text{ azaz a két komplex számnak megfelelő vektor párhuzamos.}$$

A legfontosabb **transzcendens komplex függvények** az exponenciális, logaritmus függvény, a trigonometrikus és hiperbolikus függvények.

Az exponenciális függvény valós és képzetes része:

$$w = e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y) = e^x \cos y + i e^x \sin y.$$

Tisztán képzetes argumentumú hiperbolikus függvények:

$$\cosh iy = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2} = \frac{\cos y + i \sin y + \cos(-y) + i \sin(-y)}{2} = \frac{2 \cos y}{2} = \cos y.$$

Hasonlóan: $\sinh iy = i \sin y$.

Tisztán valós argumentumú hiperbolikus függvények:

Mivel $e^y = e^{-i \cdot iy} = \cosh iy - i \sinh iy$ és $e^{-y} = e^{i \cdot iy} = \cosh iy + i \sinh iy$, adódik, hogy

$$\cosh y = \frac{e^y + e^{-y}}{2} = \frac{2 \cosh iy}{2} = \cosh iy, \text{ hasonlóan } \sinh y = -i \sinh iy$$

Fentiekkel

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \frac{e^x (\cos y + i \sin y) + e^{-x} (\cos y - i \sin y)}{2} = \cosh x \cos y + i \sinh x \sin y =$$

$$= \cos ix \cosh iy + i \sin ix \sinh iy \quad \text{igaz az is, hogy} \quad \sinh z = \sinh x \cos y + i \cosh x \sin y$$

Feltűnő a szimmetria a trigonometrikus és hiperbolikus függvények között.

Számos hasonló eredmény vezethető le, ezek megtalálhatók például Bronstejn-Szemengyajev Matematikai Zsebkönyvében vagy az interneten, például:

http://en.wikipedia.org/wiki/Hyperbolic_function

Tört lineáris függvények nevezik a $w = \frac{az+b}{cz+d}$ komplex változós ($z \in \mathbb{C}$) komplex függvényt

($w \in \mathbb{C}$), ahol $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ komplex állandók és megkívánjuk, hogy $ad - bc \neq 0$, mert ellenkező

esetben $w = \frac{az+b}{\frac{ad}{b}z+d} = \frac{az+b}{\frac{d}{b}(az+b)} = \frac{b}{d} = \text{állandó}.$

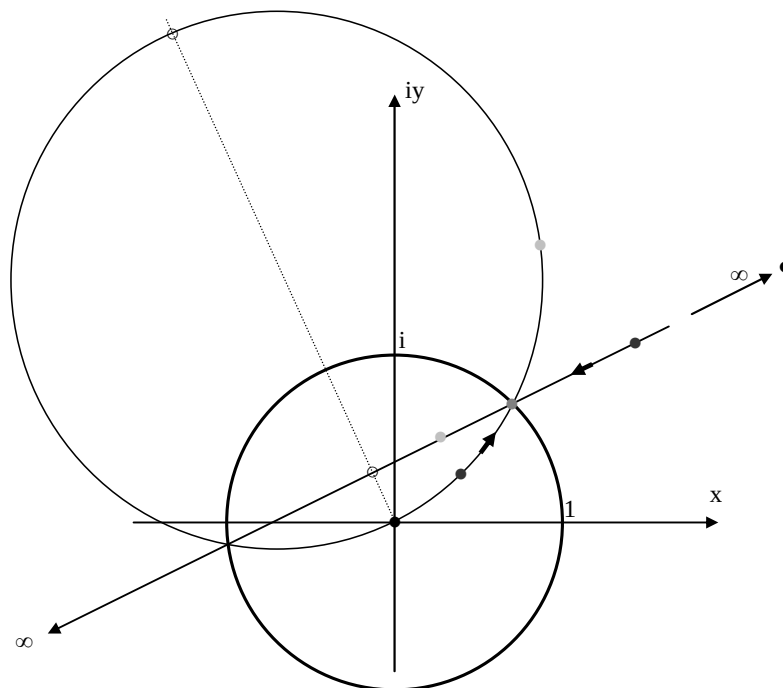
1) Legyen $c = 0$, ekkor $w = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$ egész lineáris függvény, ami nyújtást, elforgatást és eltolást jelent.

2) $c \neq 0$. Ekkor minden z -hez létezik egy egyértelmű w érték. Ha azonban $z = -\frac{d}{c}$, akkor $w = \frac{az+b}{cz+d} \rightarrow \infty$, azaz erre az esetre is kiterjesztjük a függvényt.

$$3) \quad w = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{\frac{a}{c}z + \frac{b}{c}}{z + \frac{d}{c}} = \frac{\frac{a}{c}\left(z + \frac{d}{c}\right) - \frac{ad}{c^2} + \frac{b}{c}}{z + \frac{d}{c}} = \frac{a}{c} + \frac{1}{z + \frac{d}{c}} \cdot \frac{bc - ad}{c^2}$$

és az utolsó tényező számlálója, mint korábban feltettük, nem zérus. Beláttuk tehát, hogy a w alakja $w = \alpha + \frac{\beta}{z + \gamma} = \alpha + \frac{\beta}{u}$, ahol $u = z + \gamma$. Itt α és γ eltolást, β nyújtást jelent és az u komplex szám reciprok képzése – mint láttuk – az egységgörre való inverziót és a valós tengelyre való tükrözést jelenti.

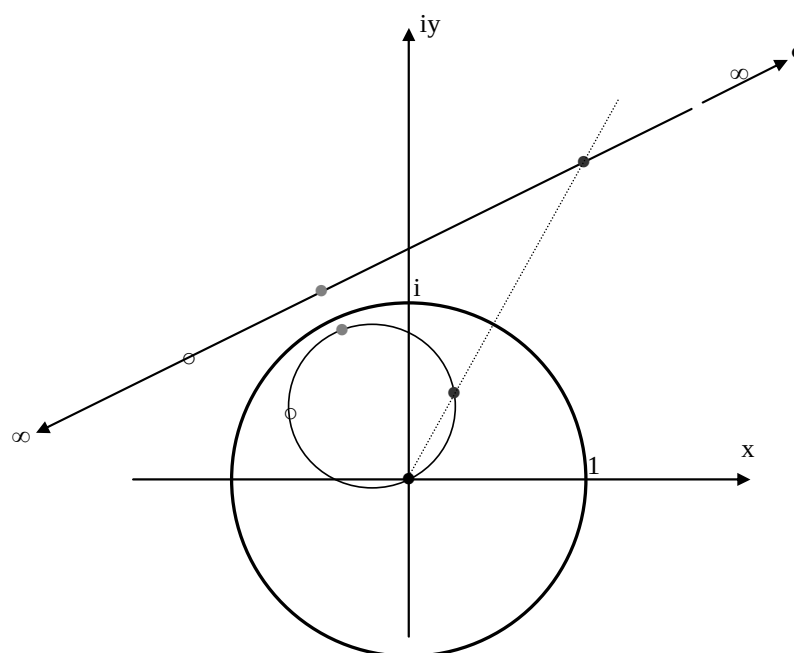
Ezek mindegyike szögtartó és forgásirány tartó leképezés.



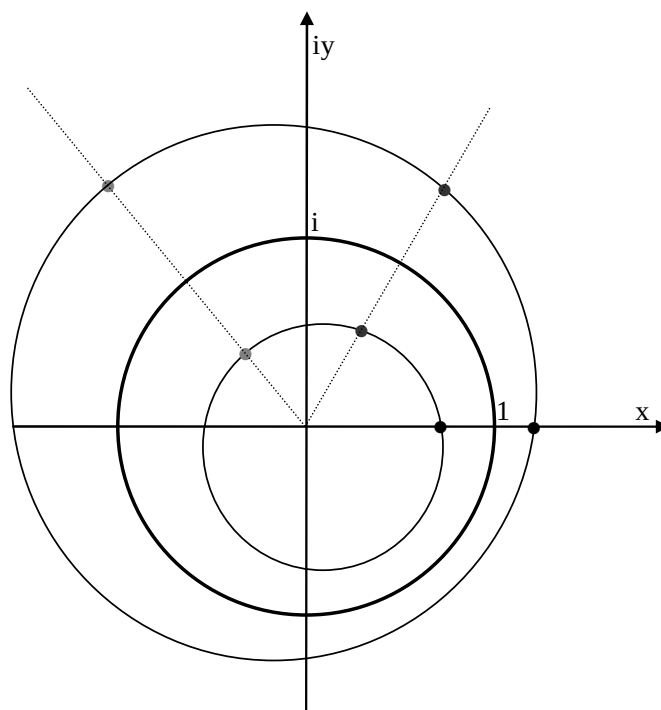
Inverzió az egységgörre melyet metsző egyenes inverze az egységgört metsző kör.

Egymásnak az azonos tónusú pontok felelnek meg.

Origón átmenő egyenes inverze saját maga ellentétes irányítással



Inverzió az egységgörre, melyen kívül haladó egyenes inverze az egységgör belsejében haladó és az origón átmenő kör. Egymásnak az azonos tónusú pontok felelnek meg



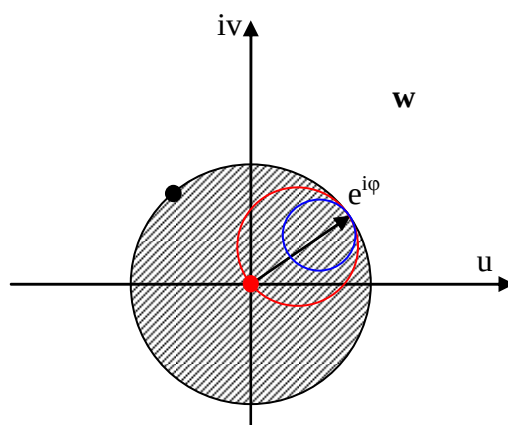
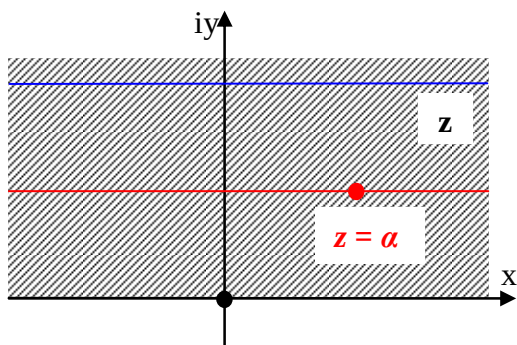
Inverzió az egységkörre, melyen kívül haladó kör inverze az egységkör belsejében haladó kör. Egymásnak az azonos tónusú pontok felelnek meg

Állítás: Tört lineáris leképezés kört körre vagy egyenesre, egyenest körre vagy egyenesre képez le.

A tört lineáris leképezés fixpontjait a $w = \frac{az+b}{cz+d} = z$ egyenlet megoldása adja, azaz a $cz^2 + (d-a)z - b = 0$ másodfokú egyenlet gyökei, így egy vagy két fixpont van.

Függvényvizsgálat

Feladat: A felső félsík leképezése az egységkör belsejére



Keressük azt a törtlineáris függvényt, amely a felső félsíkot ($\text{Im}\{z\} > 0$) a $w = e^{i\varphi}$ egységkör belsejére képezi le. Az előző fejezet 2) bekezdés alapján tudjuk, hogy $c \neq 0$.

A $w = 1 \cdot e^{i\varphi}$ egységkör képe az $y = 0$ valós tengely, így a valós tengely képén $|w| = 1$, azaz $|w| = \left| \frac{ax+b}{cx+d} \right| = 1$. Ha $x \rightarrow \infty$, akkor $|w| \rightarrow \left| \frac{a}{c} \right| = 1$, tehát $a \neq 0$ is igaz kell legyen, ekkor

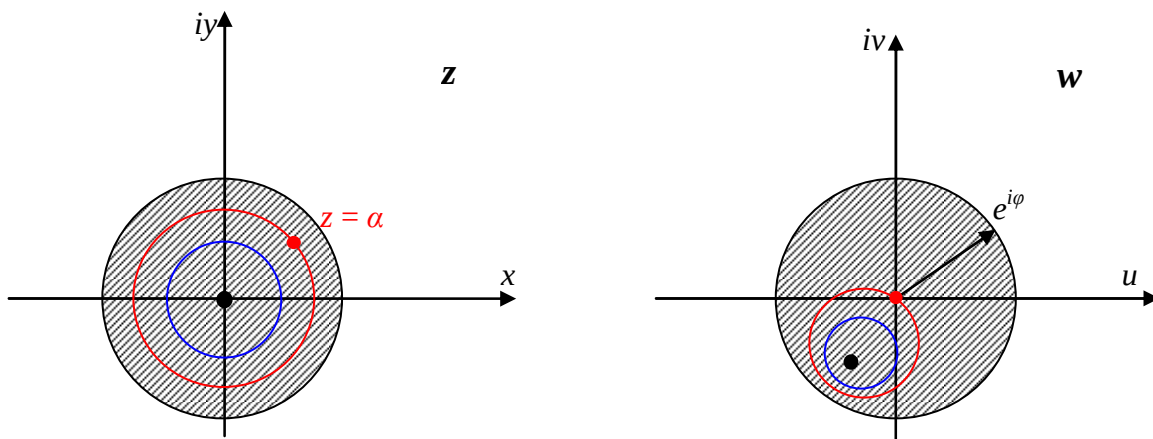
kiemelhető $\frac{a}{c}$, azaz $w = \frac{a}{c} \frac{z + \frac{b}{a}}{z + \frac{d}{c}} = k \frac{z - \alpha}{z - \beta}$, ahol $|k| = 1$. α és β különbözők kell legyenek. Nyilván a $z = \alpha$ pont képe a w komplex sík origója, $w = 0$. Ezt a megfeleltetést mutatja a fenti ábra $\bullet$ pontja. Mivel ez az egységkör belső pontja, $\text{Im}\{\alpha\} > 0$. Valós $z = x$ értékekre $|w(x)| = 1 = |k| \left| \frac{x - \alpha}{x - \beta} \right|$, így $\left| \frac{x - \alpha}{x - \beta} \right| = 1$, azaz β az α tükörképe a valós tengelyre, az α komplex konjugáltja: $\beta = \bar{\alpha}$. Így végül a keresett leképezés:

$$w = k \frac{z - \alpha}{z - \bar{\alpha}}, \quad |k| = 1, \quad \text{Im}\{\alpha\} > 0.$$

Egységkört az egységkörre leképező függvényre példa:

$$w = k \frac{z - \alpha}{1 - \bar{\alpha}z}, \quad |k| = 1, \quad |\alpha| < 1$$

A z sík koncentrikus köreinek képe a w síkon az alábbi ábra szerint alakul:



Komplex függvények folytonossága, differenciálhatósága

Definíciók:

z_0 a H ponthalmaz **torlódási pontja**, ha z_0 minden ε sugarú környezetébe a H halmaz ∞ sok pontja esik.

H **zárt**, ha tartalmazza minden torlódási pontját.

A H halmazon értelmezett $f(z)$ **folytonos a z_0 pontban**, ha bármely $\{z_n\} \subset H$ pontsorozatra, mely z_0 -hoz tart $f(z_n) \rightarrow f(z_0)$. Másik megfogalmazással minden $\varepsilon > 0$ -hoz z_0 -nak van olyan környezete, hogy az abban fekvő pontokra $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$.

A z_0 pontban $f(z)$ akkor **differenciálható**, ha **minden** $z_n \rightarrow z_0$ pontsorozatra $\frac{f(z_n) - f(z_0)}{z_n - z_0}$

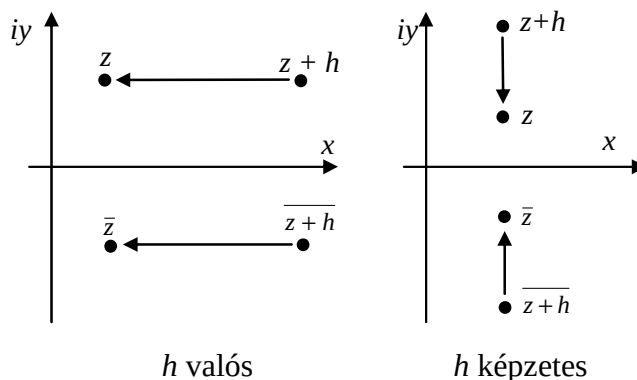
ugyanahhoz a határértékhez tart. Ezt a határértéket $\frac{df}{dz}(z_0) = f'(z_0)$ jelöli.

Az $f(z)$ függvény a T tartományban **analitikus (reguláris, holomorf)**, ha minden $z \in T$ pontban differenciálható.

A differenciálás szabályai a valós függvényekkel kapcsolatban tanult szabályokkal analóg szabályok, például: $\frac{d(az+b)}{dz} = a$; $(z^n)' = nz^{n-1}$.

Példa **nem differenciálható** komplex függvényre: $f(z) = \bar{z}$ nem differenciálható. Legyen a $\{z_n\}$ pontsorozat $z+h$, ahol a $h \rightarrow 0$ komplex szám első esetben valós, második esetben tisztán

képzetes. Így $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\overline{z+h} - \bar{z}}{h} = \begin{cases} 1, & \text{ha } h \text{ valós} \\ -\frac{h}{h} = -1, & \text{ha } h \text{ képzetes} \end{cases}$. Ez az alábbi ábrán látható.



Cauchy-Riemann differenciálegyenletek

Vizsgáljuk meg, milyen differenciálegyenletet elégít ki a $w = u + iv = f(z)$ holomorf komplex függvény $u(x,y)$ valós és $v(x,y)$ képzetes része. $f'(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$. A parciális deriváltakat az indexbe írt változóval jelöljük.

Először legyen h valós, ekkor

$$f'(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h, y) + iv(x+h, y) - (u(x, y) + iv(x, y))}{h} =$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h, y) - u(x, y)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} i \frac{v(x+h, y) - v(x, y)}{h} = u_x + iv_x$$

Másodszor legyen $h = ik$ képzetes, ekkor

$$f'(z) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{u(x, y+k) + iv(x, y+k) - (u(x, y) + iv(x, y))}{ik} =$$

$$\lim_{k \rightarrow 0} \frac{u(x, y+k) - u(x, y)}{ik} + \lim_{k \rightarrow 0} i \frac{v(x, y+k) - v(x, y)}{ik} = -iu_y + v_y$$

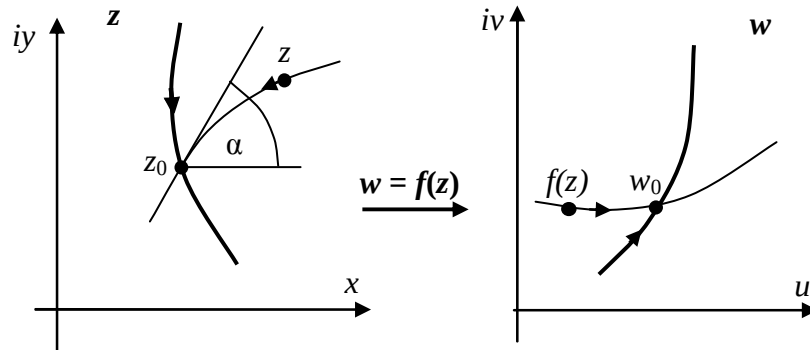
Mivel a differenciálhatósághoz a kétféle alaknak azonos határértéket kell adnia, teljesülnie kell, hogy

$u_x = v_y \quad \text{és} \quad v_x = -u_y$

Ezek a Cauchy-Riemann (C-R) differenciálegyenletek. Belátható, hogy a differenciálhatóság szükséges és elégséges feltétele a C-R differenciálegyenletek teljesülése.

A C-R differenciálegyenletek továbbderiválásával kapjuk, hogy $u_{xx} = v_{yx} = v_{xy} = -u_{yy}$, azaz $u_{xx} + u_{yy} = \Delta u = 0$, tehát $u(x,y)$ kielégíti a Laplace egyenletet, azaz **harmonikus függvény**, $v(x,y)$ ugyancsak harmonikus függvény.

Belátjuk, hogy egy holomorf függvény által létesített leképezés **konformis**, azaz szögtartó.



A z síkon a z_0 -hoz tartva határozzuk meg a $w' = f'(z)$ differenciálhányadost. A $z - z_0$ különbség szöge – argumentuma – $\arg(z - z_0) \rightarrow \alpha$. A komplex számok exponenciális alakjából nyilvánvalóan következik, hogy

$$\arg(w - w_0) - \arg(z - z_0) = \arg\left(\frac{w - w_0}{z - z_0}\right) \xrightarrow{z \rightarrow z_0} \arg(f'(z_0)) = \varphi.$$

Így $\arg(w - w_0) \rightarrow \alpha + \varphi$, de φ csak a z_0 ponttól függ, a rajta áthaladó (az ábrán vékony vagy vastag vonallal rajzolt) görbétől nem. Tehát a $w_0 = f(z_0)$ leképezés minden a z_0 , illetve a w_0 ponton átmenő görbét azonos szöggel forgat el.

Maximumtétel

Ha $f(z)$ a T tartományon holomorf és nem állandó, akkor $|f(z)|$ nem érheti el maximumát a T belső pontjában.

Ha $f(z)$ a T tartomány lezártján, $\bar{T}$ -n is folytonos, akkor $|f(z)|$ maximumát a T határán éri el, ha csak $f(z)$ nem állandó.

Hatványsor Tegyük fel, hogy a $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ hatványsor ρ konvergencia sugara nem 0, azaz $0 <$

$\rho < \infty$. Ekkor a hatványsor $f(z)$ összegfüggvénye a ρ sugarú konvergenciakörön belül holomorf és a sor tagonként differenciálható és az így kapott sor összege a függvény differenciálhányadosával

$$\text{egyenlő. } f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n n (z-a)^{n-1}.$$

Igaz továbbá, hogy ennek a sornak továbbderiválásával az $f(z)$ függvény akárhányszor

differenciálható $f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} c_n n(n-1)\dots(n-k+1)(z-a)^{n-k}$, ($k = 0, 1, 2, \dots$). Ennek a

differenciálhányadosnak a konvergenciasugara azonos az eredeti hatványsor

konvergenciasugarával. A **konvergenciasugár** $\rho = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}}$.

A k -adik deriváltat a $z = a$ helyen kiszámítva a fenti sorból

$f^{(k)}(a) = c_k k(k-1) \cdot \dots \cdot 1 \cdot 0^0 = c_k k!$, tehát $c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$ a valós függvények Taylor sorával

analóg módon. Ezt beírva a fenti hatványsorba $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (z-a)^k$.

Példák komplex Taylor sorokra:

$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots$ Innen az is következik, hogy $(e^z)' = e^z$.

$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots$

$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \dots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \dots$

Komplex függvény görbe menti integrálja

Legyen G egy folytonos, rektifikálható görbe a z komplex síkon. (Rektifikálható azt jelenti, hogy a görbét szakaszonként húrokkal közelítve a húrok alkotta törött vonal hossza a felbontás finomításával egy állandó értékhez tart.)

Az $f(z)$ függvény G görbe menti integrálja $I = \int_G f(z) dz$ alakban írható fel. A G görbét

paraméteresen megadva: $G = G(t)$ a fenti integrál így írható: $I = \int_G f(z) dz = \int_{t=a}^{t=b} f(G(t)) \dot{G}(t) dt$.

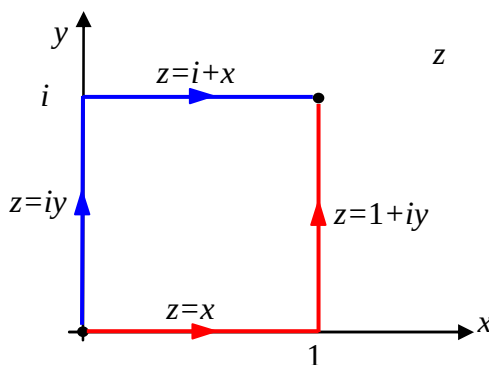
Gyakran célszerű a G görbét szakaszokra bontani az egyes szakaszokon esetleg eltérő paraméterezéssel.

Példa:

Integráljuk az $f(z) = z^2$ függvényt a $z_a = 1+0i$ ponttól a $z_b = 1+i$ pontig két eltérő görbe mentén.

Mint láttuk, $z^2 = (x+iy)(x+iy) = x^2 - y^2 + i2xy$

A két integrációs út az alábbi ábrán látható.



Integráljunk először a piros görbén két szakaszban:

$$I = \int_{x=0}^{x=1} (x^2 - y^2 + i2xy) \Big|_{y=0} \cdot 1 dx + \int_{y=0}^{y=1} (x^2 - y^2 + i2xy) \Big|_{x=1} \cdot i dy.$$

$$I = \int_{x=0}^{x=1} x^2 dx + \int_{y=0}^{y=1} (1 - y^2 + i2y) \cdot i dy = \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 + i y \Big|_0^1 - i \frac{y^3}{3} \Big|_0^1 - y^2 \Big|_0^1 = \frac{1}{3} + i - \frac{i}{3} - 1 = \frac{-2 + 2i}{3}$$

Integráljunk másodszor a kék görbén két szakaszban:

$$I = \int_{y=0}^{y=1} (x^2 - y^2 + i2xy) \Big|_{x=0} \cdot idy + \int_{x=0}^{x=1} (x^2 - y^2 + i2xy) \Big|_{y=1} \cdot 1dx.$$

$$I = \int_{y=0}^{y=1} -y^2 \cdot idy + \int_{x=0}^{x=1} (x^2 - 1 + i2x) dx = -\frac{i}{3} + \frac{1}{3} - 1 + i = \frac{-2 + 2i}{3}.$$

Tehát az eredmény nem függ az úttól. Ez holomorf függvények esetén mindig teljesül.

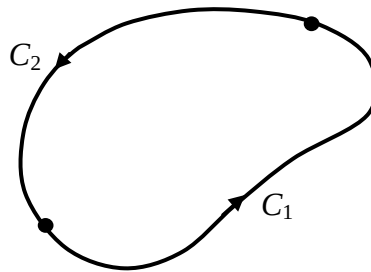
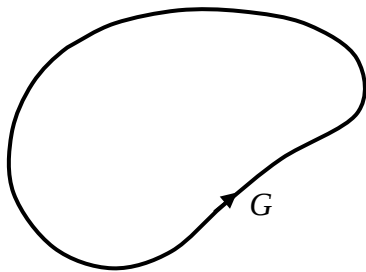
Számítsuk ki az integrált formálisan a valós analízissel analóg módon is. Az $f(z) = z^2$ függvény

primitív függvénye $F(z) = \frac{z^3}{3}$, így

$$I = \int_G z^2 dz = \frac{z^3}{3} \Big|_{z=0}^{z=1+i} = \frac{(1+i)^3}{3} = \frac{(1+i)2i}{3} = \frac{2i-2}{3},$$

Ami korábbi eredményünkkel teljesen azonos, de sokkal kevesebb számolással jár.

Integráltételek

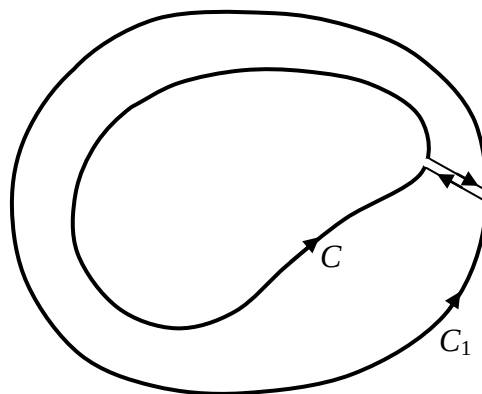
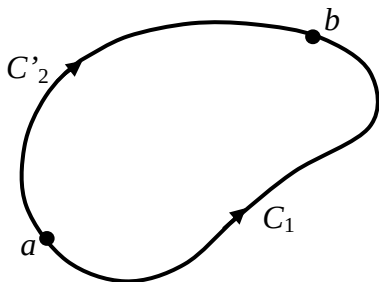


G a fenti baloldali ábra szerinti egyszeresen összefüggő zárt irányított görbe, $f(z)$ egy $T \supset G$ tartomány belsejében holomorf. Ekkor $\oint_G f(z) dz = 0$.

Ez **Cauchy integráltétele**. Ha a G görbét két darabra vágjuk, C_1 -re és C_2 -re, akkor – a jobboldali ábra szerint – $\oint_{C_1+C_2} f(z) dz = \int_{C_1} f dz + \int_{C_2} f dz = 0$. Így $\int_{C_1} f dz = - \int_{C_2} f dz$. Változtassuk meg a C_2 görbe irányítását, ez a C_2' görbét eredményezi.

Előző eredményünk szerint tehát $\int_{C_1} f dz = \int_{C_2'} f dz$, azaz az alábbi baloldali ábrán az $f(z)$ **holomorf**

függvény vonalintegrálja az a és b pont között nem függ az integrálási úttól.



A fenti jobboldali ábra alapján az is nyilvánvaló, hogy ha a T tartomány, amelyben $f(z)$ holomorf, tartalmazza mind a C , mind a C_1 zárt görbét és a közöttük lévő gyűrűszerű tartományt, akkor a

jelölt egyszeresen összefüggő, átmetszéseket tartalmazó görbére vett integrál zérus voltából következik, hogy

$$\int_C f dz = \int_{C_1} f dz,$$

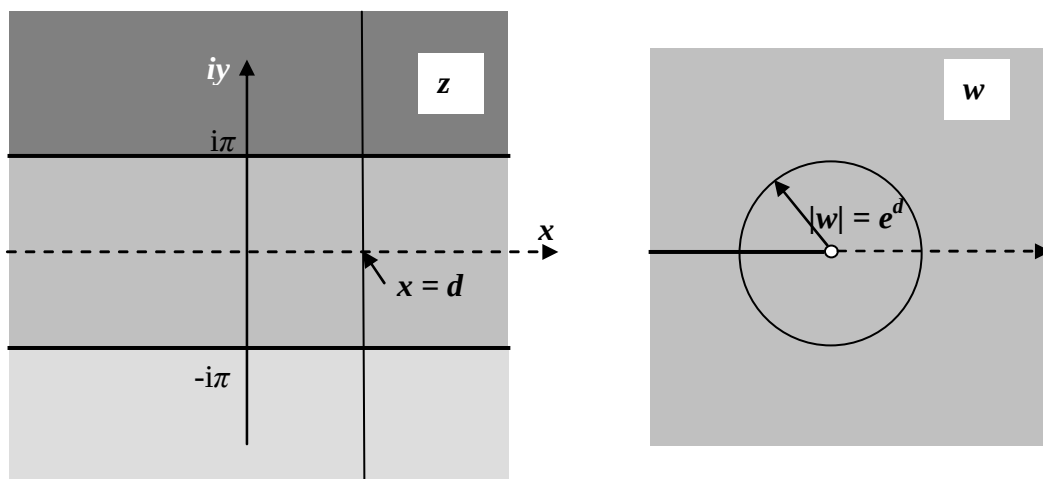
hiszen az átmetszés páron oda-vissza integrálva zérus összeggel változik az integrál.

Az $\int_a^b f(z) dz$ határozott integrál – hasonlóan a valós esethez – az $F(z)$ **primitív függvény**

ismeretében számítható, $F(z) = \int_a^z f(\zeta) d\zeta$, ahol tehát $F'(z) = f(z)$. Így

$\int_a^b f(z) dz = F(b) - F(a)$. A primitív függvények csak egy komplex konstansban különbözhetnek.

A komplex változós függvények lehetnek többértékűek. Ezt egy példán szemléltethetjük. A $w = e^z = e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$ függvény az egész komplex számsíkon értelmezve van és a $w = 0$ kivételével minden értéket felvehet és a hozzárendelés egyértelmű. Az inverz függvény $z = \ln w = \ln(re^{i\varphi}) = \ln r + i(\varphi + 2k\pi) = x + iy$; ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), mert $e^{i\varphi}$ értéke nem változik, ha φ -t a 2π egész számú többszörösével növeljük vagy csökkentjük (ld. alábbi ábrán).



A $z = \ln w$ függvény főértéke a $-\pi < y < \pi$ sávba esik. Ezt a sávot a $w = e^z$ függvény az egész komplex w síkra képezi le (mint láttuk, a $w = 0$ pont kivételével). Ezt egy **Riemann levélnek** nevezik. A következő z síkbeli sáv ugyanide képződik le, de egy e feletti Riemann levélre (a különböző sötétségű sávok ugyanarra a w síkra képeződnek le, az alapértelmezés szerinti sáv képe vele azonos tónusú). Fontos, hogy a primitív függvény azonos Riemann levélen fekvő pontbeli helyettesítési értékeinek különbségeként számítsuk a határozott integrált.

Morera tétele = a Cauchy integráltétel megfordítása

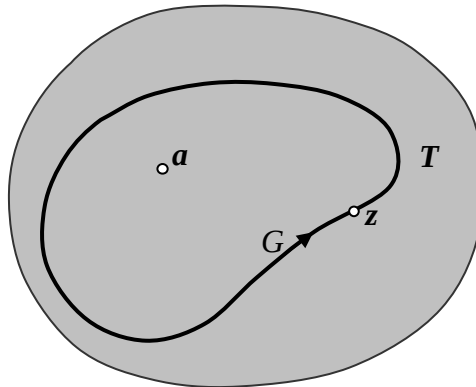
Ha $f(z)$ a T tartományon **folytonos és** $\oint_G f(z) dz = 0$ minden $G \subset T$ görbén, akkor $f(z)$ a T -ben holomorf.

Cauchy-féle integrálformula

Ha $f(z)$ holomorf egy $T \supset G$ tartomány belsejében és az a pont a G zárt görbe által körbefogott tartomány belső pontja, akkor

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_G \frac{f(z)}{z-a} dz.$$

Ez egy igen fontos tétel, mert lehetőséget ad arra, hogy egy holomorf függvény értékét egy tartomány (kétdimenziós sík) tetszőleges pontjában a függvény görbén felvett (egydimenziós vonal) értékeiből előállítsuk. A következő ábrán a pontok és vonalak helyzete látható



Térjünk vissza a komplex Taylor sorokra, mint láttuk

$$f(z) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(z-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(z-a)^2 + \dots + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(z-a)^k + \dots$$

Számítsuk ki $f^{(k)}(a)$ értékét a Cauchy féle integrálformula alapján.

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_G \frac{f(z)}{z-a} dz$$

$$f'(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_G \frac{-f(z)}{(z-a)^2} (-1) dz = \frac{1!}{2\pi i} \oint_G \frac{f(z)}{(z-a)^2} dz$$

$$f''(a) = \frac{2!}{2\pi i} \oint_G \frac{f(z)}{(z-a)^3} dz$$

:

$$f^{(k)}(a) = \frac{k!}{2\pi i} \oint_G \frac{f(z)}{(z-a)^{k+1}} dz, \text{ innen } \frac{f^{(k)}(a)}{k!} = \frac{1}{2\pi i} \oint_G \frac{f(z)}{(z-a)^{k+1}} dz, \text{ ezt visszaírhatjuk a Taylor}$$

$$\text{sor eredeti alakjába, ekkor azt kapjuk, hogy } f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\left[\frac{1}{2\pi i} \oint_G \frac{f(z)}{(z-a)^{k+1}} dz \right]}_{c_k} (z-a)^k.$$

Ez az összeg $k < 0$ indexekre is kiterjeszthető. Ha $k = -1$, akkor a sor -1-edik tagját kapjuk:

$$\left[\frac{1}{2\pi i} \oint_G \frac{f(z)}{(z-a)^0} dz \right] \cdot \frac{1}{z-a} = \left[\frac{1}{2\pi i} \oint_G f(z) dz \right] \cdot \frac{1}{z-a} \stackrel{jel}{=} \frac{1}{z-a} \text{Res}\{f(z), a\}. \text{ A Res-zel jelölt, tagot}$$

külön is kiírva, az f függvény szinguláris a pontbeli **reziduumát** kapjuk:

$$\text{Res}\{f(z), a\} = \frac{1}{2\pi i} \oint_G f(z) dz.$$

Középértéktétel

Alkalmazzuk a Cauchy-féle integráltételt az a pont körüli ρ sugarú körívre, azaz a G integrációs út, ami beleesik a függvény holomorfitási tartományába leírható, mint $z = a + \rho e^{it}$, ahol $0 \leq t \leq 2\pi$.

Ekkor, mivel $dz = \frac{dz}{dt} dt = i\rho e^{it} dt$

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_G \frac{f(z)}{z-a} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(a + \rho e^{it})}{\rho e^{it}} i\rho e^{it} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + \rho e^{it}) dt.$$

Eszerint egy holomorf komplex függvény a pontbeli értéke az a pont körüli kis ρ sugarú körön felvett függvényértékek integrál középértéke.

Alapintegrál

Legyen a komplex szám, m egész szám és $r > 0$. Ekkor

$$\oint_{|z-a|=r} (z-a)^m dz = \begin{cases} 0, & \text{ha } m \neq -1 \\ 2\pi i, & \text{ha } m = -1 \end{cases}.$$

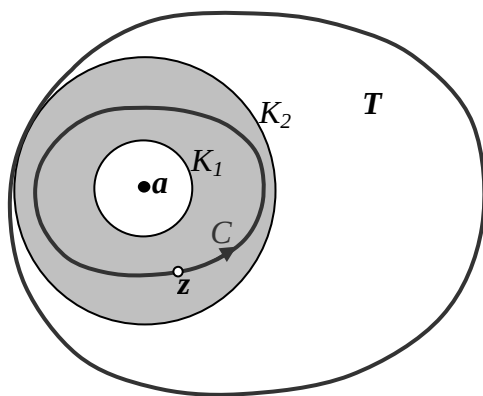
Most is legyen $z = z(t) = a + re^{it}$. Deriválás és helyettesítések után a paraméteres integrál

$$\oint_{|z-a|=r} (z-a)^m dz = ir^{m+1} \int_0^{2\pi} e^{i(m+1)t} dt = \begin{cases} \frac{ir^{m+1}}{i(m+1)} e^{i(m+1)t} \Big|_0^{2\pi} = 0; & m \neq -1 \\ i \int_0^{2\pi} dt = 2\pi i; & m = -1 \end{cases}.$$

Laurent sor

Terjesszük ki a Taylor sorban az összegzést tovább egészen $-\infty$ -ig!

Legyen az $f(z)$ függvény a T tartományban holomorf, kivéve a $z = a$ pontot. Ekkor az a pont körüli K_1, K_2 körgyűrűk által közrefogott tartományban ($K_1, K_2 \subset T$)



ahol

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n,$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_G \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz.$$

Ez a végtelen sor az a pontban szinguláris $f(z)$ függvény **Laurent sora**.

Legyen $z = a$ az $f(z)$ függvény szinguláris pontja!

A Laurent sor együtthatóinak lehetséges értékei alapján három esetet különböztetünk meg:

- 1) $\forall c_n = 0$, ha $n < 0$, ekkor az $f(z)$ függvénynek a $z = a$ pontban megszüntethető szingularitása van.
- 2) $\exists c_n \neq 0$, ha $n < 0$, de csak véges sok n esetén, ekkor $z = a$ az $f(z)$ függvény n -ed rendű pólusa.

3) végtelen sok $c_n \neq 0$, ha $n < 0$, ekkor $z = a$ az $f(z)$ függvény lényeges szingularitása.

Példák a fenti három esetre.

$$1) f(z) = \frac{\sin z}{z} = \frac{1}{z} \left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - + \dots \right) = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - + \dots, \text{ azaz nincs negatív indexű}$$

együttható. Bár a függvénynek a $z = 0$ szinguláris pontja, de e ponthoz a $z = 1$ értéket rendelve megszüntettük a szingularitást.

$$2) f(z) = \frac{\cos z}{z} = \frac{1}{z} \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - + \dots \right) = \frac{1}{z} - \frac{z}{2!} + \frac{z^3}{4!} - + \dots, \text{ a } z = 0 \text{ pont elsőrendű pólus, mert}$$

$c_{-1} \neq 0$, a többi negatív indexű együttható zérus.

$$3) f(z) = \sin\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{z} - \frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{5!z^5} - + \dots, \text{ azaz } c_{-n} = \frac{1}{n!} \quad \forall n \text{ páratlan indexre.}$$

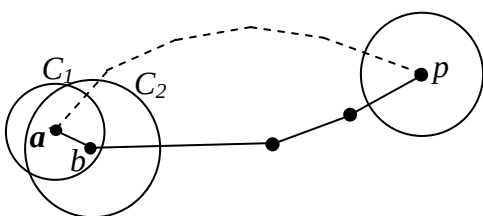
Analitikus folytatás

Tegyük fel, hogy **nem ismerjük az $f(z)$ függvényt**, de ismerjük egy a pont körüli C_1 konvergenciakör belsejében a függvény $f_a(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$ hatványsorát. Így a C_1 kör belső

b pontjában kiszámítható a függvény $f(z)$ összes deriváltjával együtt, kapunk egy b körüli Taylor sort, amely konvergens egy C_2 konvergenciakör belsejében. Ha C_2 kinyúlik C_1 -ből, akkor

$$f_b(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-b)^n \text{ az előbbi függvény kiterjesztése és az egyesített } C_1 \cup C_2 \text{ tartományban a}$$

fenti Taylor sorokkal előállítható, az egyesített tartomány nem tartalmazhat szinguláris helyet.



Ha eljutunk egy p pontba valamilyen úton, és ott létezik egy

$f(z) = f_p(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n (z-p)^n$ Taylor sor, akkor annak együtthatói nem függenek attól, milyen úton jutottunk oda.

Példa nem folytatható sorra

$$F(z) = 1 + z + z^2 + z^4 + z^8 + \dots,$$

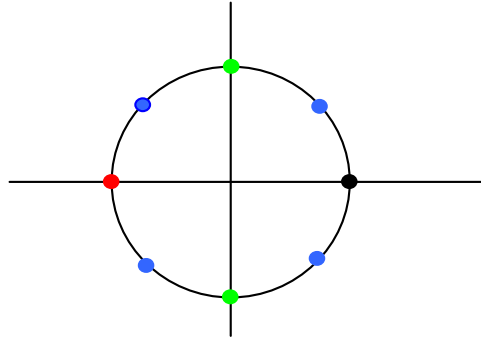
$$F(z^2) = 1 + z^2 + z^4 + z^8 + \dots = F(z) - z,$$

$$F(z^4) = 1 + z^4 + z^8 + \dots = F(z) - z - z^2,$$

:

$$\text{tehát } F(z) = z + F(z^2) = z + z^2 + F(z^4) = z + z^2 + z^4 + F(z^8) \dots$$

A $z = 1$ (●), $z^2 = 1$ (●, ●), $z^4 = 1$ (●, ●, ●), $z^8 = 1$ (●, ●, ●, ●), stb. mind szinguláris helyek, mert ekkor a sorösszeg végtelen. Ezek a pontok mind az egységgörön fekszenek. Az egységgör ívének bármilyen kis szakaszára esik szinguláris pont, ezért nem tudunk kijutni az egységgörből azon kívüli pontba.



Integráltételek, sorfejtések és kapcsolatuk összefoglalása

Cauchy integráltétele



Alapintegrál

$f(z)$ holomorf $G \subset T$ -n, akkor $\oint_G f(z) dz = 0$

$$\oint_{|z-a|=r} (z-a)^m dz = \begin{cases} 0, & \text{ha } m \neq -1 \\ 2\pi i, & \text{ha } m = -1 \end{cases}$$



Morera tétele

$f(z)$ **folytonos** T -n és $\oint_G f(z) dz = 0$, minden $G \subset T$ görbén $\rightarrow f(z)$ holomorf T -ben.

Hatványsor



$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

Cauchy-féle integrálformula:

Középértéktétel:



$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_G \frac{f(z)}{z-a} dz$$

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + \rho e^{it}) dt$$



$$\frac{f^{(k)}(a)}{k!} = \frac{1}{2\pi i} \oint_G \frac{f(z)}{(z-a)^{k+1}} dz$$

Taylor-sor



$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (z-a)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\left[\frac{1}{2\pi i} \oint_G \frac{f(z)}{(z-a)^{k+1}} dz \right]}_{c_k} (z-a)^k$$



$$\text{Res}\{f(z), a\} = \frac{1}{2\pi i} \oint_G f(z) dz$$

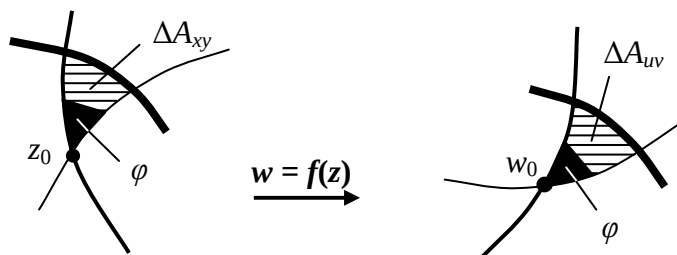
Laurent-sor

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

Analitikus folytatás nem ismerjük az $f(z)$ függvényt, de ismerjük egy a pont körüli C_1 konvergenciakör belsejében a függvény hatványsorát, akkor létezik analitikus folytatás a konvergenciakörön túl.

Konform leképezések

A holomorf $w = f(z)$ komplex függvény szögtartó (φ azonos a z és a w síkon), ezt korábban láttuk. Így az elemi ΔA_{xy} terület és a képtartomány ΔA_{uv} területének aránya megegyezik az oldalak arányainak négyzetével, azaz $|f'(z)|^2$ -tel.



A folytonosan differenciálható valós változós valós függvénpár, $\left. \begin{matrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{matrix} \right\}$ egy $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ transzformációt valósít meg. Ha minden tárgyponthoz egy és csak egy képpont tartozik, akkor ez egy-egyértelmű transzformáció. Az $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ és $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ egymás képei. A fenti transzformáció az (x, y)

sík R tartományát az (u, v) sík R' tartományára képezi le. Belátható, hogy $|f'(z)|^2 = \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}$.

Valóban, mivel $w = u + iv = f(z)$, így $f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{i \partial y} + i \frac{\partial v}{i \partial y} = -i \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}$. És így a derivált négyzetének abszolút értéke

$$|f'(z)|^2 = \text{valós} \cdot \text{valós} + \text{képzetes} \cdot \text{képzetes} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} = J$$

Az $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ transzformációs függvények Jacobi determinánsa.

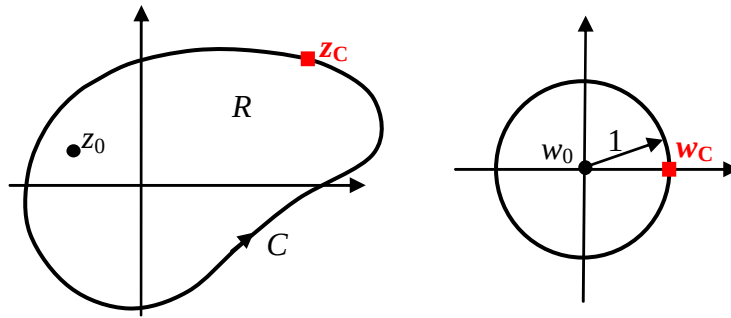
$$J = \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Beláttuk tehát, hogy $\lim_{\Delta A_{xy} \rightarrow 0} \frac{\Delta A_{uv}}{\Delta A_{xy}} = |f'(z)|^2 = \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = J$

Tehát $f'(z) \neq 0$ esetén egy-egyértelmű a leképezés, a leképezés szög és aránytartó.

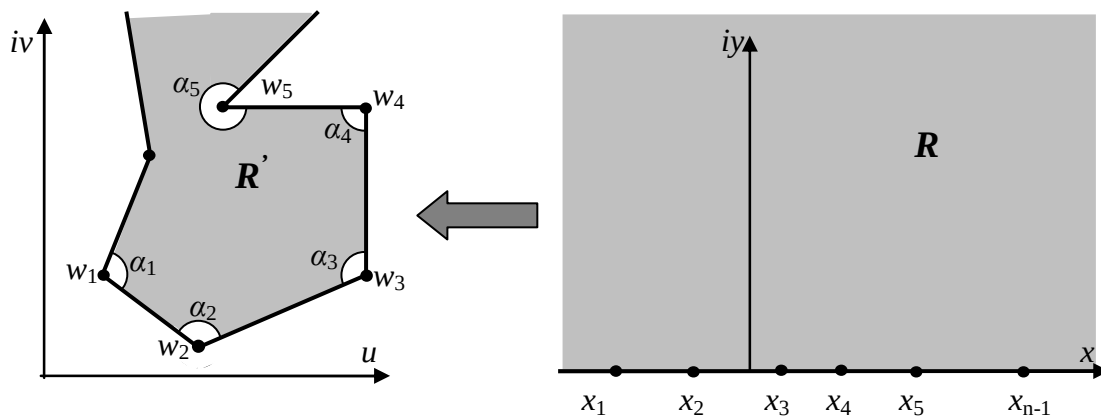
Riemann leképezési tétele (1851)

Létezik olyan holomorf $w = f(z)$ függvény, amelyik egy egyszeresen összefüggő R tartományt, melynek határa C kölcsönösen egyértelműen az egységkör belsejére képezi le. Beállítható az $f(z)$ úgy, hogy tetszőleges $z_0 \in R$ az origóba, tetszőleges $z_C \in C$ az egységkör adott w_C pontjára képződjön le (ld. a következő ábrát).



Schwarz-Cristoffel transzformáció

Feladat a felső félsík (R tartomány) leképezése egy egyenes szakaszokkal határolt R' sokszög belsejére. Az R' sokszög lehet zárt vagy nyitott.



A leképező függvény deriváltja, illetve a leképező függvény alábbi alakú:

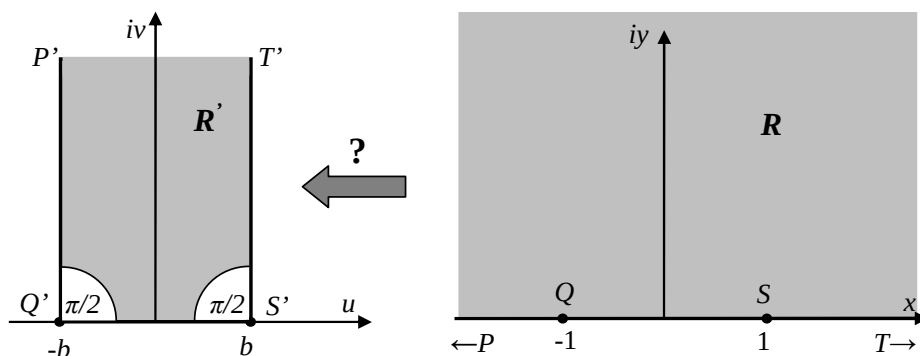
$$\frac{dw}{dz} = A(z - x_1)^{\frac{\alpha_1}{\pi} - 1} \cdot (z - x_2)^{\frac{\alpha_2}{\pi} - 1} \cdot \dots \cdot (z - x_n)^{\frac{\alpha_n}{\pi} - 1},$$

$$w = A \int (z - x_1)^{\frac{\alpha_1}{\pi} - 1} \cdot (z - x_2)^{\frac{\alpha_2}{\pi} - 1} \cdot \dots \cdot (z - x_n)^{\frac{\alpha_n}{\pi} - 1} dz + B.$$

Három csúcspont tetszőlegesen helyezhető el a valós tengelyen, de célszerű az x_n pontot a ∞ -be helyezni, mert így a leképező függvény egyszerűbb alakú. Valóban, ha $A = \frac{K}{(-x_n)^{\frac{\alpha_n}{\pi} - 1}}$, akkor

$$\frac{dw}{dz} = K(z - x_1)^{\frac{\alpha_1}{\pi} - 1} \cdot \dots \cdot (z - x_{n-1})^{\frac{\alpha_{n-1}}{\pi} - 1} \cdot \left(\frac{x_n - z}{x_n} \right)^{\frac{\alpha_n}{\pi} - 1} \xrightarrow{x_n \rightarrow \infty} K(z - x_1)^{\frac{\alpha_1}{\pi} - 1} \cdot \dots \cdot (z - x_{n-1})^{\frac{\alpha_{n-1}}{\pi} - 1} \cdot 1$$

Példa



$$\frac{dw}{dz} = A(z+1)^{\frac{1}{2}-1} \cdot (z-1)^{\frac{1}{2}-1} = A[(z+1)(z-1)]^{-\frac{1}{2}} = \frac{A}{\sqrt{z^2-1}},$$

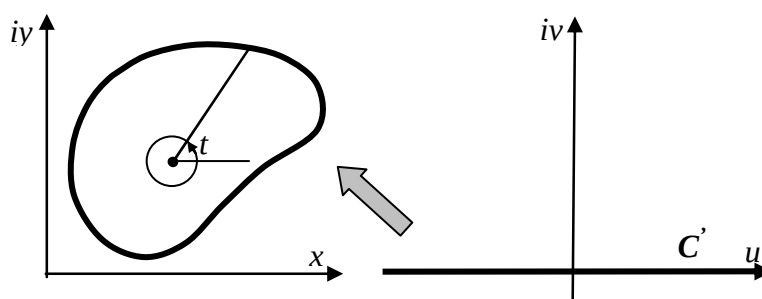
$$w = A \int \frac{dz}{\sqrt{z^2-1}} = K \int \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = K \cdot \arcsin z + B, \quad \text{ahol } K = -iA.$$

A két konstans, K és B értéke az ábrán jelölt pontok megfeleltetéséből könnyen adódik:

$$w = \mp b + i0 \rightarrow x = \mp 1, \quad \text{azaz} \quad K \cdot \arcsin(\mp 1) + B = K \left(\mp \frac{\pi}{2} \right) + B = \mp b,$$

$$\text{innen } K = \frac{2b}{\pi} \text{ és } B = 0, \quad \text{így} \quad w = \frac{2b}{\pi} \arcsin z.$$

A valós tengely (egy szakaszának) leképezése tetszőleges, paraméteresen megadott kontúrú zárt C görbére.

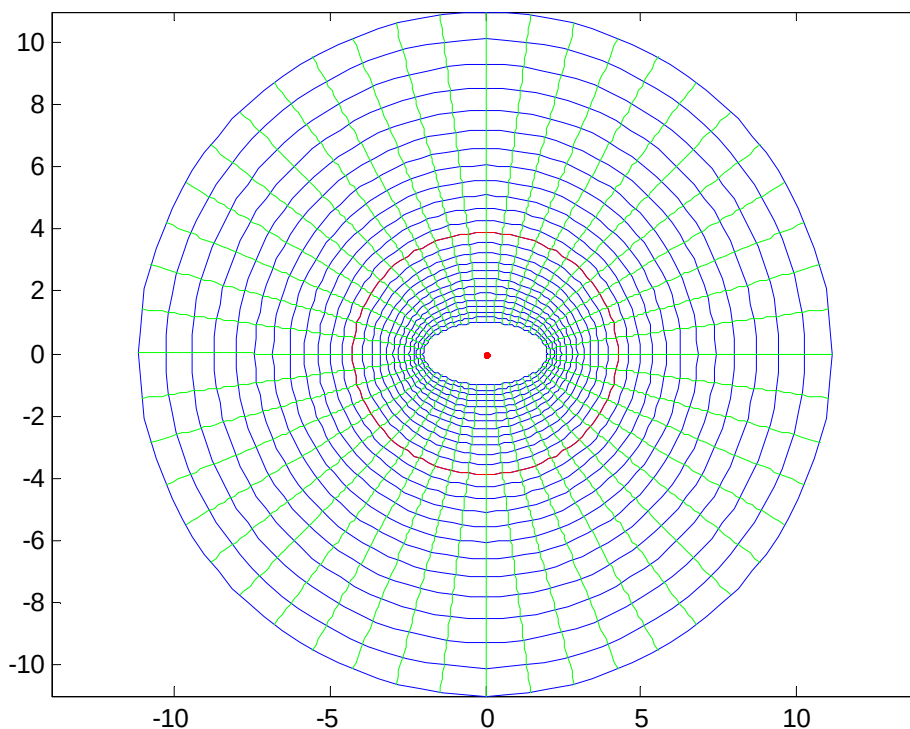


Legyen a C görbe a t paraméter (például polárszög) segítségével $x = F(t)$, $y = G(t)$ alakban adva, ahol F és G folytonosan differenciálható függvény. Ekkor a $z = F(w) + iG(w)$ a w sík valós tengelyét, C' -t leképezi a C görbére. Nyilván, hiszen a C' -n $w = u + iv = u$ és így $z = F(u) + iG(u) = F(t) + iG(t)$ éppen a C görbe leírása.

Példa: a valós tengely leképezése tetszőleges kontúrú görbére, az alsó félsík leképezése a görbe külsejére:

Egy origó középpontú ellipszis paraméteres egyenlete $x = a \cos t$; $y = b \sin t$; $t \in [0, 2\pi]$.

Így a $z = a \cos w + ib \sin w$ függvény az $iv = 0$ helyettesítéssel leképezi a valós u tengelyt az ellipszisére. Valóban, $z = x + iy = a \cos u + ib \sin u$ éppen az ellipszis paraméteres egyenlete a z komplex síkon. A valós tengellyel párhuzamos, de alatta haladó $w = u - i \cdot 1$ egyenes képe a z síkon egy az eredetnél kisebb tengelyviszonyú zárt görbe. Minél nagyobb a w egyenes távolsága a valós tengelytől, annál „kerekebb” a képgörbe, fokozatosan körbe megy át.

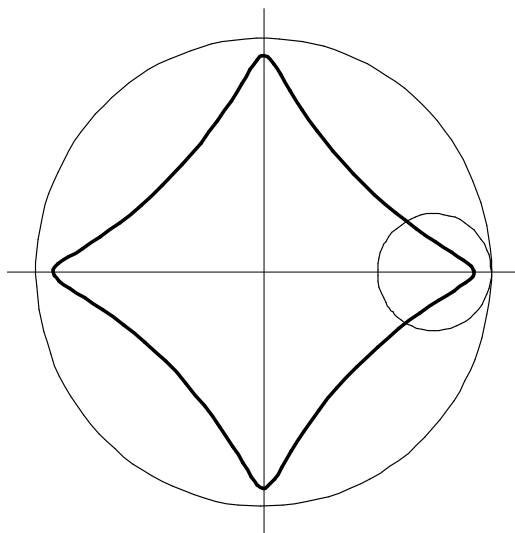


A $z = 2 \cos t + i \sin t$ ellipszis köré rajzolt koordinátaháló és a $w = u - i$ egyenes képe (piros vonal).

További **példa** paraméteresen adott zárt görbe valós tengelyre való leképezésére: Képezzük le az alábbi nyújtott hipocikloist:

$$x(t) = (R-r)\cos t + \lambda r \cos\left(\frac{R-r}{r}t\right); \quad y(t) = (R-r)\sin t - \lambda r \sin\left(\frac{R-r}{r}t\right), \quad \lambda < 1 \text{ és } R/r = n.$$

A r sugarú kör legördül a R sugarú kör belsején n teljes körülfordulást megtéve és a r sugarú kör belső ($\lambda < 1$) pontja írja le a görbét.



A leképező függvény inverze tehát leképezi a negatív képzetes részű félsíkot a hipociklois külsejére

$$z(w) = (R-r)\cos w + \lambda r \cos\left(\frac{R-r}{r}w\right) + i \left[(R-r)\sin w - \lambda r \sin\left(\frac{R-r}{r}w\right) \right]$$

Komplex potenciálok

A kétdimenziós áramlások modellezhetők komplex változós függvényekkel, ha az áramlás stacionárius, forrás- és örvénymentes.

Az **örvénymentesség** $\text{rot} \mathbf{v} = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} = 0$. Ekkor létezik egy $\Phi(x,y)$ sebességpotenciál, hogy

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \text{grad} \Phi = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} \end{pmatrix}, \text{ azaz } v_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x}; v_y = \frac{\partial \Phi}{\partial y},$$

mert valóban $\text{rot} \mathbf{v} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) = 0$.

A **forrásmentesség** $\text{div} \mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0$. Ekkor létezik egy $\Psi(x,y)$ áramfüggvény, hogy

$$v_x = \frac{\partial \Psi}{\partial y}; v_y = -\frac{\partial \Psi}{\partial x},$$

mert valóban $\text{div} \mathbf{v} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) = 0$.

Számítsuk ki $\text{div} \mathbf{v} = \text{div} \text{grad} \Phi$ -t! $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) = \Delta \Phi = 0$, tehát Φ harmonikus függvény, azaz egy holomorf komplex függvénynek például valós része.

Számítsuk ki $\text{rot} \mathbf{v}$ -t! $\text{rot} \mathbf{v} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y} \right) = -\Delta \Psi = 0$, tehát Ψ is harmonikus függvény, azaz egy holomorf komplex függvénynek például képzetes része.

Legyen $w = \Phi + i\Psi = f(z) = f(x + iy)$ a holomorf függvény. Differenciáljuk ezt a függvényt!

$$w' = \frac{df}{dz} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + i \frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{i \partial y} + i \frac{\partial \Psi}{i \partial y} = \frac{\partial \Psi}{\partial y} - i \frac{\partial \Phi}{\partial y}.$$

Mindkét alak szerint kapjuk, hogy $w' = v_x - i v_y$, azaz

$$\text{a } w = \Phi + i\Psi \text{ holomorf függvény } w' = \frac{df}{dz} \text{ deriváltjának}$$

valós része a sebességvektor x irányú komponense,

képzetes része a sebességvektor y irányú komponensének (-1) -szerese, tehát

$$w' = \frac{df}{dz} = \bar{v}, \text{ a konjugált sebesség.}$$

Ebből az is következik, hogy $|v| = |\overline{w'(z)}| = |w'(z)|$.

A torlópontokban $|v| = 0$, azaz $|w'(z)| = 0$, tehát $w'(z) = 0$.

A $\Psi(x,y)$ = állandó vonalak áramvonalak,

A $\Phi(x,y)$ = állandó vonalak ekvipotenciális vonalak,

és ezek kölcsönösen merőlegesek egymásra és görbevonalú ortogonális koordinátarendszert alkotnak.

Áramlások linearitása, komplex potenciálok szuperpozíciója

Mivel mind a divergencia, mind a rotáció lineáris operáció, így két forrás és örvénymentes sebességtér (vagy elektromos erőter) összege is forrás és örvénymentes. A holomorf komplex potenciálok szintén összeadhatóak.

Legismertebb áramlástan példák egy párhuzamos síkáramlás, forrás, nyelő vagy dipólus valamint örvény. Utóbbiak legyenek az origóba helyezve.

Ezek komplex potenciálját, annak valós és képzetes részét, valamint konjugált sebességét az alábbi táblázatban foglaljuk össze

Típus	Komplex potenciál	Konjugált sebesség	Potenciálfüggvény	Áramfüggvény
Párhuzamos áramlás	$Ve^{-i\varphi} \cdot z$	$Ve^{-i\varphi}$	$V(x \cos \varphi + y \sin \varphi)$	$V(y \cos \varphi - x \sin \varphi)$
Forrás-nyelő	$\frac{Q}{2\pi} \ln z$	$\frac{Q}{2\pi z}$	$\frac{Q}{2\pi} \ln \rho$, ahol $z = \rho e^{i\varphi}$	$\frac{Q}{2\pi} \varphi$
Dipólus (azonos intenzitású, végtelen közeli forrás és nyelő)	$\frac{v}{z}$	$-\frac{v}{z^2}$	$\frac{vx}{ z ^2}$	$-\frac{vy}{ z ^2}$
Örvény	$\frac{\Gamma}{2\pi} \cdot i \ln z$	$\frac{i\Gamma}{2\pi z}$	$-\frac{\Gamma}{2\pi} \varphi$, ahol $z = \rho e^{i\varphi}$	$\frac{\Gamma}{2\pi} \ln \rho$

Dipólus, örvény és párhuzamos áramlás szuperpozíciója

Helyezzünk el a z komplex számsík origójába egy $v = 1$ erősségű dipólust és egy $\Gamma = 1$ erősségű örvényt és szuperponáljuk ezekre a $V = 1$ sebességű, $\varphi = 0$ szögű párhuzamos áramlást. Az eredő komplex potenciál $w = \frac{1}{z} + \frac{i}{2\pi} \ln z + z$. A konjugált sebesség $\bar{v} = \frac{dw}{dz} = \frac{-1}{z^2} + \frac{i}{2\pi z} + 1 = v_x - iv_y$.

Innen következik, hogy $v_x = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{y}{2\pi(x^2 + y^2)} + 1$,

$$v_y = \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{x}{2\pi(x^2 + y^2)}.$$

A fenti táblázat szerint az áramfüggvény $\Psi(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2} + \frac{\ln \sqrt{x^2 + y^2}}{2\pi} + y$

Határozzuk meg az áramfüggvény értékét az origó körüli egységkörön, ahol tehát $x = \cos \varphi$; $y = \sin \varphi$. $\Psi(\cos \varphi, \sin \varphi) = \frac{-\sin \varphi}{1} + \frac{\ln \sqrt{1}}{2\pi} + \sin \varphi = -\sin \varphi + 0 + \sin \varphi = 0$, azaz az egységkör áramvonal, rajta az áramfüggvény állandó.

Határozzuk meg a sebességet az egységkörön!

$$v_x = \frac{\sin^2 \varphi - \cos^2 \varphi}{(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)^2} + \frac{\sin \varphi}{2\pi(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)} + 1 = \frac{-\cos 2\varphi}{1} + \frac{\sin \varphi}{2\pi} + 1,$$

$$v_y = \frac{-\sin 2\varphi}{(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)^2} - \frac{\cos \varphi}{2\pi(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)} = \frac{-\sin 2\varphi}{1} - \frac{\cos \varphi}{2\pi}.$$

A torlópontokban a sebesség mindkét komponense zérus: $v_x = 0$ és $v_y = 0$. A második feltétel szerint

$$0 = \frac{-2\sin \varphi \cos \varphi}{1} - \frac{\cos \varphi}{2\pi}, \text{ azaz } \sin \varphi = \frac{-1}{4\pi}, \text{ tehát } \varphi = \arcsin\left(-\frac{1}{4\pi}\right).$$

$$\varphi_1 = -4,56^\circ; \varphi_2 = 184,56^\circ.$$

Teljesül-e ekkor, hogy v_x is zérus?

$$v_x = -(\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) + \frac{\sin \varphi}{2\pi} + 1 = -(1 - \sin^2 \varphi - \sin^2 \varphi) + \frac{\sin \varphi}{2\pi} + 1 = 2\sin^2 \varphi - 1 + \frac{\sin \varphi}{2\pi} + 1 = \frac{2}{(4\pi)^2} - \frac{1}{4\pi \cdot 2\pi} = 0 \text{ valóban.}$$

A torlópontok az egységkörön lévő

$$e^{-i(4,56^\circ \pi/180^\circ)} = e^{-i0,079587} = \cos(-0,079587) + i\sin(-0,079587) = 0,99683 - 0,0795i, \text{ illetve}$$

$$e^{-i((180^\circ + 4,56^\circ) \pi/180^\circ)} = e^{i3,22118} = \cos(3,22118) + i\sin(3,22118) = -0,99683 - 0,0795i$$

komplex számok.

$$A \quad \Psi(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2} + \frac{\ln \sqrt{x^2 + y^2}}{2\pi} + y = \text{állandó.} \text{ áramvonalon az áramfüggvény teljes deriváltja}$$

zérus, azaz

$$d\Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Psi}{\partial y} dy = \left[\frac{y2x}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{x}{(x^2 + y^2)2\pi} \right] dx + \left[\frac{-1(x^2 + y^2) + y2y}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{y}{(x^2 + y^2)2\pi} + 1 \right] dy = 0.$$

Így megszerkeszthető az áramvonalak érintője irányába mutató iránymező.

Hasznos sorfejtések

$$\cot z = \frac{1}{z} + 2z \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^2 - (n\pi)^2}$$

$$\coth z = \frac{1}{z} + 2z \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^2 + (n\pi)^2}$$

A második sorfejtést tovább alakítjuk:

$$\coth z = \frac{1}{z} + 2z \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^2 - (in\pi)^2} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z - in\pi} + \frac{1}{z + in\pi} \right) = \frac{1}{z} + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{1}{z - in\pi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{z - in\pi}.$$

Ezt a sort két lépésben tovább transzformáljuk: $\pi \coth \pi z = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\pi}{\pi z - in\pi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{z - in}$. Ezután

$$\text{legyen } z = \frac{z_0 - z'}{t}, \text{ ekkor } \pi \coth \frac{\pi}{t}(z_0 - z') = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\frac{z_0 - z'}{t} - in} = t \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{z_0 - (z' + itn)}.$$

Végül t -vel osztva

$$\frac{\pi}{t} \coth \frac{\pi}{t} (z_0 - z') = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{z_0 - (z' + itn)}$$

Áramlástanai példa

Ez az eredmény igen hasznos, mert lehetővé teszi, hogy egy egyenletes t osztású végtelen sok azonos intenzitású szingularitásból (forrásból vagy örvényből) álló sor konjugált sebességterének eredőjét meghatározzuk. Mint láttuk, az origóba helyezett szingularitás konjugált sebessége a z_0 pontban $\frac{S}{2\pi z_0}$, ahol $S = Q$ forrás és $S = i\Gamma$ örvény esetén. Ha a szingularitást a z' pontba

helyezzük, akkor a konjugált sebesség $\frac{S}{2\pi(z_0 - z')}$. Ha nem egy, hanem végtelen sok, egymás felett (íy irányban) it osztásközzel elhelyezett szingularitás sebesség konjugáltját akarjuk kiszámítani, akkor ezek szuperpozícióját kell meghatározni:

$$\bar{v}(z_0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{S}{2\pi(z_0 - [z' + itn])} = \frac{S}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{z_0 - [z' + itn]} = \frac{S}{2\pi} \frac{\pi}{t} \coth \frac{\pi}{t} (z_0 - z') = \frac{S}{2t} \coth \frac{\pi}{t} (z_0 - z')$$

A coshz és sinh függvények 2. oldal 5. és 6. sorában lévő képletei alapján hányadosuk valós és képzetes része is könnyen kiszámítható.

Ha a szingularitások nem a képzetes tengely irányában vannak t osztással eltolt helyzetben elhelyezve, hanem a valós tengellyel párhuzamosan, akkor a cotangens-függvény adja a végtelen sor összegét.

Hőtani alkalmazás

A 2 dimenziós hővezetés differenciálegyenlete izotróp anyag esetén (ld. Környey Tamás: Hőátvitel, II-2-(2) képlet, Fourier differenciálegyenlet) $\dot{q} = -\lambda \text{grad} T$.

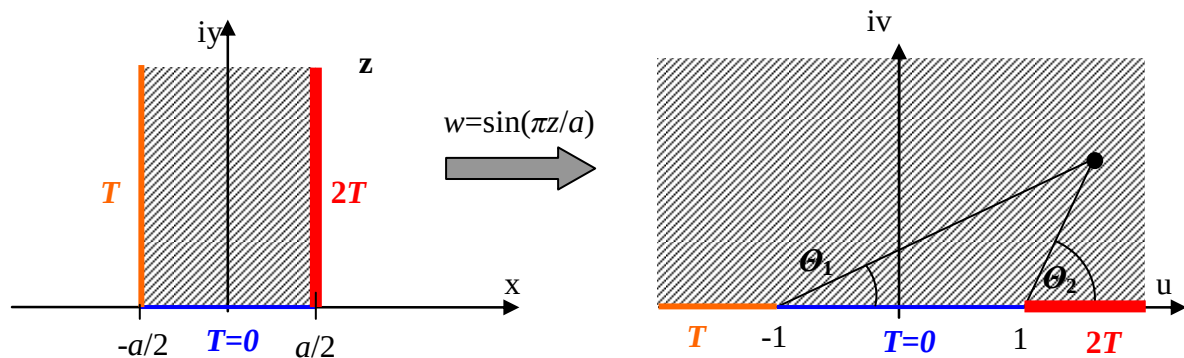
$$\text{Ennek komplex alakja } \dot{q} = -\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial x} + i \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \dot{q}_x + i \dot{q}_y.$$

Ha egy egyszeresen összefüggő, zárt C görbével határolt tartományban nincsenek hőforrások, akkor

$$\text{div } \dot{q} = -\lambda \text{div grad} T = -\lambda \Delta T = -\lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) = 0, \text{ azaz a hőmérséklet eloszlás harmonikus}$$

függvény, itt felhasználtuk a hővezetés fenti differenciálegyenletét. Láttuk, hogy egy holomorf komplex változós függvény valós (és képzetes) része harmonikus függvény: $f(z) = \Psi(x, y) + i\Phi(x, y)$. A valós és a képzetes rész, $\Psi(x, y)$, illetve $\Phi(x, y)$ a hőfluxus vonalakat, illetve az izotermákat adják meg, amennyiben a peremfeltételeket is kielégítik.

Tekintsük példaként az alábbi ábrán látható, $+y$ irányban végtelen, x irányban a szélességű féltestet, melynek határoló oldalain szakaszonként állandó előírt hőmérséklet uralkodik.



A feladat megoldást ne a z síkon, hanem annak célszerű leképzett w komplex számsíkján keressük! Az ábrán fel van tüntetve egy ilyen célszerű – a geometriát lényegesen egyszerűsítő – leképező függvény.

Kézikönyvek (pl. Bronstein idézett zsebkönyve) alapján

$$\sin\left(\frac{\pi z}{a}\right) = \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cosh\left(\frac{\pi y}{a}\right) + i \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sinh\left(\frac{\pi y}{a}\right). \text{ Így a } z = \mp \frac{a}{2} + i0 \text{ pontok képe:}$$

$$w = u + iv = \sin\left(\mp \frac{\pi}{2}\right) \cosh(0) + i \cos\left(\mp \frac{\pi}{2}\right) \sinh(0) = \pm 1 + i0, \text{ amint ez az ábra jobboldali képén látszik.}$$

Mint láttuk, a hőmérséklet eloszlást egy harmonikus függvény, azaz egy holomorf függvény valós képzetes része írja le.

Definiáljuk a w komplex számsíkon az $f(w) = A \ln(w+1) + B \ln(w-1) + iC$ holomorf függvényt, amelyben A, B, C valós konstansok.

Az $f(w) = \ln(w)$ logaritmus függvény exponenciális alakja: $\ln(w) = \ln(\rho e^{i\theta}) = \ln \rho + i\theta$, itt θ a komplex számot az origóval összekötő egyenes szöge. Ha a logaritmus függvény argumentuma változik, akkor a szöget definiáló egyenes is módosul. Nyilván $\text{Im}\{\ln(w \pm 1)\} = \theta_{1,2}$.

Következik tehát, hogy

$$\Phi(u + iv) = \text{Im}\{A \cdot \ln(w+1) + B \cdot \ln(w-1) + iC\} = A\theta_1 + B\theta_2 + C,$$

ami egy harmonikus függvény. Ennek a függvénynek ki kell elégítenie a peremfeltételeket a leképzett komplex síkon (ld. a jobboldali ábrát).

A w sík valós tengelyén $v = 0$.

Ha $u > 1$, akkor $\theta_1 = \theta_2 = 0$, azaz $\Phi(u > 1, 0) = A \cdot 0 + B \cdot 0 + C = 2T$, tehát $C = 2T$.

Ha $1 > u > -1$, akkor $\theta_1 = 0$; $\theta_2 = \pi$, azaz $\Phi(1 > u > -1, 0) = A \cdot 0 + B \cdot \pi + 2T = 0$, tehát $B = -\frac{2T}{\pi}$.

Ha $u < -1$, akkor $\theta_1 = \theta_2 = \pi$, azaz $\Phi(u < -1, 0) = A \cdot \pi - \frac{2T}{\pi} \cdot \pi + 2T = T$, tehát $A = \frac{T}{\pi}$.

Behelyettesítve ezeket az értékeket kapjuk a w síkon a hőmérséklet eloszlást.

$$\Phi(u + iv) = \frac{T}{\pi} \theta_1 - \frac{2T}{\pi} \theta_2 + 2T = \frac{T}{\pi} \arctan\left(\frac{v}{u+1}\right) - \frac{2T}{\pi} \arctan\left(\frac{v}{u-1}\right) + 2T.$$

Utolsó lépésként ezt az eloszlást vissza kell transzformálni a z komplex síkra, ahol a vizsgált félttest

hőmérséklet eloszlását keressük. Mint láttuk, $u = \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cosh\left(\frac{\pi y}{a}\right)$ és

$$v = \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sinh\left(\frac{\pi y}{a}\right).$$

Így a hőmérséklet eloszlás a z komplex számsíkon:

$$T(x, y) = \frac{T}{\pi} \cdot \arctan \left(\frac{\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sinh\left(\frac{\pi y}{a}\right)}{\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cosh\left(\frac{\pi y}{a}\right) + 1} \right) - \frac{2T}{\pi} \cdot \arctan \left(\frac{\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sinh\left(\frac{\pi y}{a}\right)}{\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cosh\left(\frac{\pi y}{a}\right) - 1} \right) + 2T.$$

A fluxus vonalak a $\Psi(x, y) = \frac{T}{2\pi} \ln[(u+1)^2 + v^2] - \frac{T}{\pi} \ln[(u-1)^2 + v^2]$ függvény szintvonalai,

ahol, mint korábban $u = \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cosh\left(\frac{\pi y}{a}\right)$ és $v = \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sinh\left(\frac{\pi y}{a}\right)$.

Szabályozástechnikai alkalmazások

Jelöljük a kimenő jellemzőt v -vel és a bemenő jellemzőt u -val. Ezeket egy n -edrendű közönséges lineáris differenciálegyenlet kapcsolja össze. Az időt t -vel jelöljük, az idő szerinti differenciálást, integrálást a szokásos módon.

A szabályozó differenciálegyenlete

$$A_n v^{(n)} + A_{n-1} v^{(n-1)} + \dots + A_2 v'' + A_1 v' + A_0 v = B_{-1} \int u dt + B_0 u + B_1 u' + B_2 u'' + \dots$$

Keressük a megoldást $u = u_0 e^{i\omega t}$ bemenőjel esetén $v = v_0 e^{i(\omega t + \varphi)} = v_0 e^{i\varphi} e^{i\omega t}$ alakban. Itt a kimenőjel fázisszöge a bemenőjelhez képest φ . Helyettesítsük be ezeket a fenti differenciálegyenletbe.

$$v_0 e^{i\varphi} (A_n (i\omega)^n + A_{n-1} (i\omega)^{n-1} + \dots + A_2 (i\omega)^2 + A_1 i\omega + A_0) e^{i\omega t} = u_0 (B_{-1} (i\omega)^{-1} + B_0 + B_1 i\omega + B_2 (i\omega)^2 + \dots) e^{i\omega t}.$$

Egyszerűsítve $e^{i\omega t}$ -vel és a kimenőjel amplitúdójának $e^{i\varphi}$ -szeresét a bemenő jel amplitúdójával osztva

$$\frac{v_0 e^{i\varphi}}{u_0} = \frac{v}{u} = \frac{B_{-1} (i\omega)^{-1} + B_0 + B_1 i\omega + B_2 (i\omega)^2 + \dots}{A_n (i\omega)^n + A_{n-1} (i\omega)^{n-1} + \dots + A_2 (i\omega)^2 + A_1 i\omega + A_0} = F(i\omega),$$

Itt bevezettük a **frekvenciafüggvényt**, amit $F(i\omega)$ -val jelöl a szakirodalom, ez egy komplex függvény. A frekvenciafüggvény reciproka a $\Phi(i\omega)$ **karakterisztikus függvény**. A 2. oldal alján láttuk, hogy a reciprokképzés az egységkörre való inverziót, majd a valós tengelyre való tükrözést jelenti.

Szabályozó típusa	Differenciálegyenlet	$\Phi(i\omega)$ karakterisztikus függvény
Arányos	$A_0 v = u$	A_0
Elsőrendű késleltetésű	$A_1 v' + A_0 v = u$	$iA_1 \omega + A_0$
Másodrendű késleltetésű	$A_2 v'' + A_1 v' + A_0 v = u$	$-A_2 \omega^2 + A_1 i\omega + A_0$
Harmadrendű késleltetésű	$A_3 v''' + A_2 v'' + A_1 v' + A_0 v = u$	$-iA_3 \omega^3 - A_2 \omega^2 + iA_1 \omega + A_0$
Negyedrendű késleltetésű	$A_4 v^{(IV)} + A_3 v''' + A_2 v'' + A_1 v' + A_0 v = u$	$A_4 \omega^4 - iA_3 \omega^3 - A_2 \omega^2 + iA_1 \omega + A_0$

Arányos és integráló elsőrendű késleltetéssel	$A_1 v' + A_0 v = B_{-1} \int u dt + B_0 u$	$\frac{iA_1 \omega + A_0}{B_0 + B_{-1} (i\omega)^{-1}}$
Differenciáló elsőrendű késleltetéssel	$A_1 v' + A_0 v = B_1 u'$	$\frac{iA_1 \omega + A_0}{iB_1 \omega}$

Meromorf függvény definíciója

Az $f(z)$ függvény a $z \in D$ tartományon **meromorf**, ha D -ben holomorf egyes elkülönített pólusoktól eltekintve.

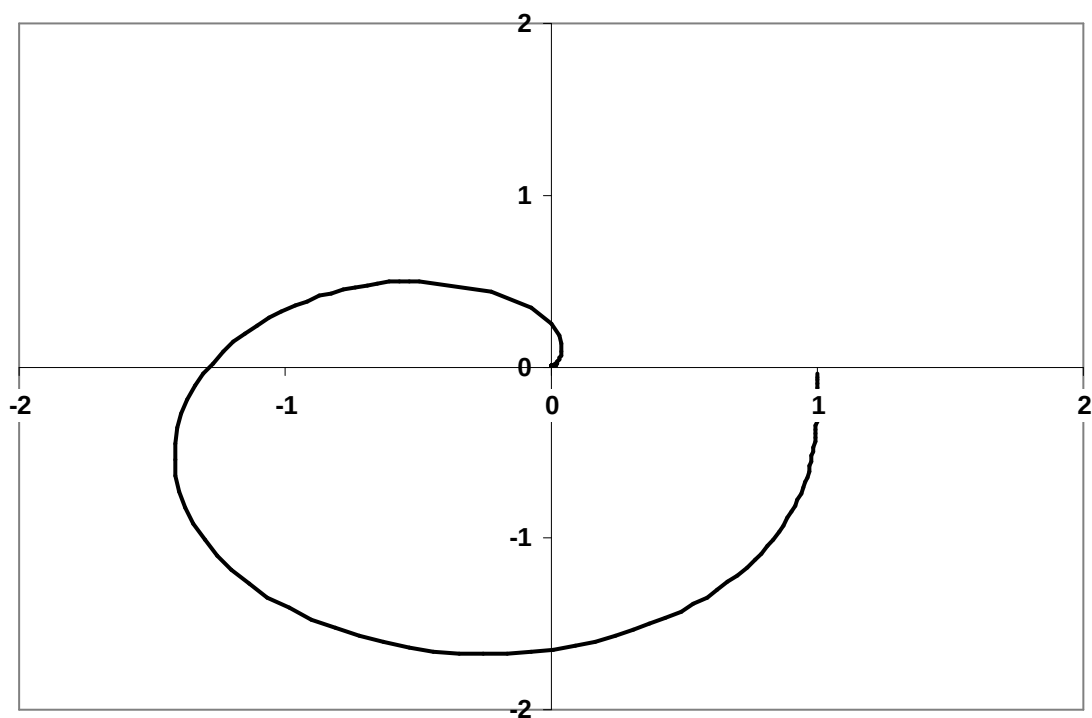
Rouché tétele

Legyen az $f(z)$ függvény a Zárt, irányított C görbe belsejében meromorf és a C görbén $f(z) \neq 0$. A $w = f(z)$ függvény a z sík ilyen típusú C görbét a w sík zárt G görbéjére képezi le. Ha a z pont C görbén körüljár, akkor ennek képe a G görbét járja végig. Mivel $f(z)$ -nek a C görbén nincs zérushelye, így a G görbe nem halad át a w sík origóján. Jelöljünk ki a C görbén egy z_0 pontot, ennek képe a G görbe w_0 pontja, melynek polárszöge, más néven argumentuma Φ_0 . Kiindulva z_0 -ból és oda visszatérve a képpont is visszatér w_0 -ba, eközben argumentuma megváltozik Φ_1 -re. Tömör jelöléssel az argumentum megváltozása: $\Delta_C \arg f(z) = \Phi_1 - \Phi_0$, ami nyilvánvalóan 2π

egészszámú többszöröse, azaz $\frac{\Delta_C \arg f(z)}{2\pi}$ egész szám.

Ezen jelölésekkel bizonyítható **Rouché tétele**, mely szerint $\frac{\Delta_C \arg f(z)}{2\pi} = Z - P$, ahol Z jelöli az

$f(z)$ függvény C -be eső zérushelyeinek, P jelöli az $f(z)$ függvény C -be eső pólusainak számát figyelembe véve ezek multiplicitását is.



A fenti ábrán egy negyedrendű késleltetésű szabályozó $F(i\omega)$ frekvenciafüggvénye látható, az ω körfrekvencia az $(1,0)$ pontban zérus, mire ω értéke eléri az $\omega = 5$ értéket, a görbe gyakorlatilag bejut az origóba. A differenciálegyenlet együtthatóinak értéke ebben a példában $A_4 = 2$, $A_3 = 3$, $A_2 = 4$, $A_1 = 2$, $A_0 = 1$.

Zsukovszkij szárnymetszet előállítás

Mint láttuk, egy a valós tengellyel párhuzamos, V sebességű áramlásba helyezett origó középpontú R sugarú körhenger körüli áramlás komplex potenciálja, ha a henger körül Γ cirkuláció ébred,

$$w = V \left(\frac{R^2}{z} + z \right) + \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln z. \quad \text{A kialakuló áramkép sebességkonjugáltja}$$

$$\bar{v} = \frac{dw}{dz} = V \left(1 - \frac{R^2}{z^2} \right) + i \frac{\Gamma}{2\pi z}.$$

Célunk, hogy ne csak körhenger, hanem aerodinamikai szárnymetszet kontúrú hengerek (szárnyak) körüli sebességteret is meghatározhassunk. Ehhez meg kell találni a R sugarú kört szárnymetszetre leképező komplex függvényt.

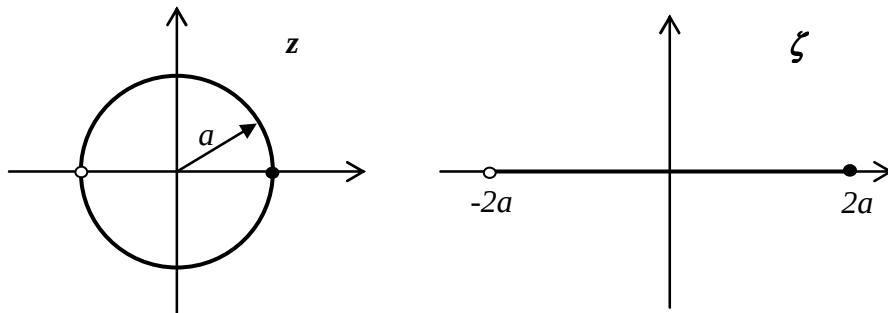
A $\zeta = z + \frac{a^2}{z}$ függvény szinguláris pontjai azok a pontok, ahol a függvény nem differenciálható.

$\frac{d\zeta}{dz} = 1 - \frac{a^2}{z^2}$. A $z = \pm \sqrt{a^2}$ pontokban a differenciáhányados 0. Ezek a leképezés kritikus pontjai, melyekben, mint a 12. oldalon láttuk, a Jacobi determináns 0. Ezeken kívül a leképezés egy-egyértelmű.

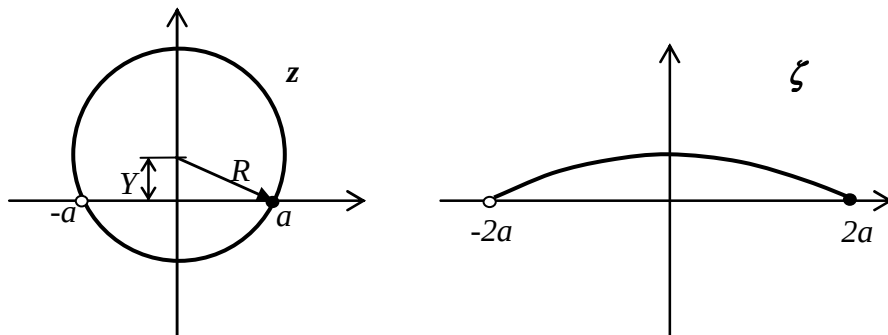
Mire képezi le a $\zeta = z + \frac{a^2}{z}$ függvény az a sugarú, origó középpontú kört? A kör egyenlete

$$z = ae^{i\varphi}, \text{ így } \zeta = ae^{i\varphi} + \frac{a^2}{ae^{i\varphi}} = a(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}) = 2a \cos \varphi + i0 = \xi + i\eta, \text{ tehát a kör leképzettje a}$$

valós tengelynek a $-2a < \xi < 2a$ szakasza.

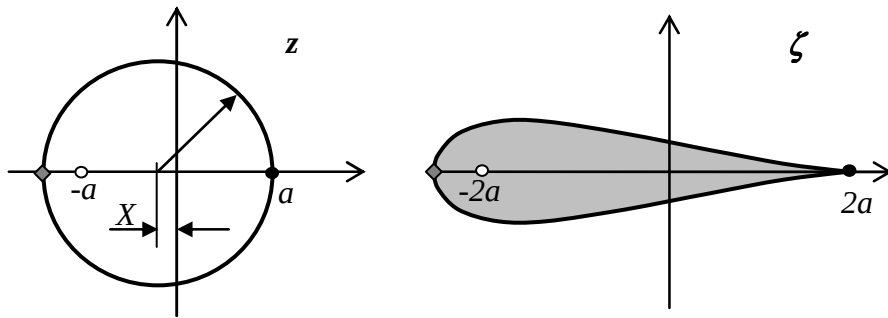


Mozdítsuk el a kör középpontját a pozitív képzetes tengely mentén Y -nal úgy, hogy a – megnövekedett sugarú – kör továbbra is átmenjen a valós tengely $\pm a$ pontjain. Ekkor az $R > a$ sugarú kör képe egy körívdarab, mely most is átmegy a ζ sík $\xi = \pm 2a$ pontjain.

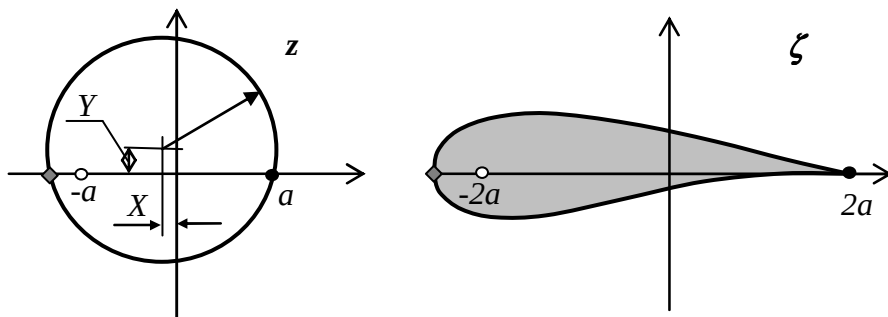


Következő lépésben mozdítsuk el a kört a negatív valós tengely mentén X -szel úgy, hogy belsejében tartalmazza a $z = -a$ pontot és menjen át a $z = a$ ponton. Ekkor a $z = -a$ pont nem lesz kritikus pontja a leképezésnek, ott a Jacobi determináns nem lesz 0, így a leképezés a $\diamond$ pontban konformis marad, azaz ívelt görbét kapunk, mely egy szimmetrikus profil orr része. A kör $z = a$

pontja továbbra is kritikus, ott a leképezés elfajuló, mint az alábbi, ζ síkbeli profil • jelű pontja mutatja.



Végül a körhenger felfelé Y -nal és balra X -szel történő egyidejű elmozdításával ívelt aerodinamikai profilt kapunk.



Láttuk, hogy egy henger körkörüli áramkép párhuzamos áramlásban a $w = V \left(\frac{R^2}{z} + z \right) + \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln z$

komplex potenciállal írható le. A kör R sugarát meghatározza a megvalósítandó sebességprofil. Az ívelt Zsukovszki profil esetében például az ábra alapján nyilvánvaló, hogy $R^2 = (a + X)^2 + Y^2$ a körhenger sugarának négyzete. A Γ cirkulációt akkorára kell választani, hogy a kilépő torlópont éppen a $z = a + i0$ pontba kerüljön. A komplex potenciál a ζ síkon $w(\zeta) = w(z(\zeta))$ és így a

konjugált sebesség $\bar{v}_\zeta = \frac{dw}{d\zeta} = \frac{dw}{dz} \cdot \frac{dz}{d\zeta} = \frac{dw}{dz} \cdot \frac{1}{f'(z)} = \bar{v}_z \cdot \frac{1}{f'(z)}$, ahol

$$f'(z) = \frac{d}{dz} \left(z + \frac{a^2}{z} \right) = 1 - \frac{a^2}{z^2}, \text{ azaz}$$

$$\bar{v}_\zeta = \left\{ V \left(\frac{-R^2}{z^2} + 1 \right) + i \frac{\Gamma}{2\pi z} \right\} \frac{z^2}{z^2 - a^2},$$

Ezeket a sebességeket kell a z pont ζ leképzettjéhez hozzárendelni.

Stabilitásvizsgálat

A numerikus sémák stabilitás vizsgálatának egyik módszerét a magyar származású Neumann János dolgozta ki, ezt mutatjuk be.

A $\frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} = \alpha \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}$ parabolikus másodrendű parciális differenciálegyenlet egy lehetséges numerikus közelítése az alábbi differenciaegyenlet.

$$\frac{C_i^{n+1} - C_i^n}{\Delta t} + u \frac{C_{i+1}^n - C_{i-1}^n}{2 \Delta x} = \alpha \frac{C_{i+1}^n - 2C_i^n + C_{i-1}^n}{\Delta x^2}. \text{ A tömörebb jelölés érdekében szorozzuk}$$

végig az egyenletet az időlépéssel és vezessük be a $\sigma = \frac{u \Delta t}{\Delta x}$; $\beta = \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2}$ jelöléseket. Ekkor az iménti egyenlet alakja:

$$C_i^{n+1} - C_i^n + \frac{\sigma}{2} (C_{i+1}^n - C_{i-1}^n) = \beta (C_{i+1}^n - 2C_i^n + C_{i-1}^n).$$

Jelölje a differenciaegyenlet pontos megoldását $\bar{C}_i^n$, az egyenlet hibás, közelítő megoldását pedig C_i^n . A hiba tehát $\varepsilon_i^n = C_i^n - \bar{C}_i^n$. Innen $C_i^n = \bar{C}_i^n + \varepsilon_i^n$. Írjuk ezt vissza az egyenletbe és legyen egyelőre $\beta = 0$, azaz a diffúzió nélküli egyenletet tekintsük:

$\bar{C}_i^{n+1} - \bar{C}_i^n + \varepsilon_i^{n+1} - \varepsilon_i^n + \frac{\sigma}{2} (\bar{C}_{i+1}^n - \bar{C}_{i-1}^n + \varepsilon_{i+1}^n - \varepsilon_{i-1}^n) = 0$. Mivel $\bar{C}_i^n$ pontos megoldása az egyenletnek, így az összes felülhúzással jelölt tag együttesen éppen kiesik, és az marad, hogy

$\varepsilon_i^{n+1} - \varepsilon_i^n + \frac{\sigma}{2} (\varepsilon_{i+1}^n - \varepsilon_{i-1}^n) = 0$, tehát a hiba ugyanazt az egyenletet elégíti ki, mint a keresett pontos numerikus megoldás. A hibaegyenlet rendezése után kapjuk, hogy

$$\varepsilon_i^{n+1} = \varepsilon_i^n - \frac{\sigma}{2} (\varepsilon_{i+1}^n - \varepsilon_{i-1}^n) = \frac{\sigma}{2} \varepsilon_{i-1}^n + \varepsilon_i^n - \frac{\sigma}{2} \varepsilon_{i+1}^n.$$

Jelölje az n -edik időlépésben a megoldás egyes rácspontokban létrejött hibáiból álló vektort ε^n , a hibaegyenlet együtthatóiból felépített mátrixot pedig A ! Az új időlépésbeli ε^{n+1} hibavektor ekkor

$$\begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \varepsilon_i^{n+1} \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \sigma/2 & 1 & -\sigma/2 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \varepsilon_{i-1}^n \\ \varepsilon_i^n \\ \varepsilon_{i+1}^n \end{pmatrix}, \text{ azaz tömören } \varepsilon^{n+1} = A \cdot \varepsilon^n. \text{ A kezdeti feltételekből}$$

kiindulva az első időlépés után már hiba terheli a megoldást: ε^1 . A második lépés után a hiba $\varepsilon^2 = A \cdot \varepsilon^1$, a harmadik lépés után $\varepsilon^3 = A \cdot A \cdot \varepsilon^1 = A^2 \cdot \varepsilon^1$. Az $n+1$ -edik lépésben tehát $\varepsilon^{n+1} = A^n \cdot \varepsilon^1$. Ahhoz, hogy a hiba ne nőjön határtalanul, szükséges, hogy az A mátrix n -edik hatványának normája (ami az abszolút érték megfelelője mátrixok esetében) korlátos legyen: $\|A^n\| \leq K$.

Feltehető, hogy a hibavektor, mint a hely függvénye Fourier-sorba fejthető. Ehhez az kell, hogy a hely periodikus függvénye legyen. A megoldást a $0 \leq x \leq L$ tartományban keressük. Mivel a peremfeltételek nem feltétlenül periodikus függvények, azaz $C(0) \neq C(L)$, így a $0 \leq x \leq L$ tartományt tükrözni kell az origóra, hogy biztosan periodikus függvényt kapjunk. A $-L \leq x \leq L$ tartományon a legnagyobb hullámhosszú periodikus függvény hullámhossza éppen $\lambda_{\max} = 2L$. A legkisebb, még a numerikus sémában ábrázolható hullám hullámhossza pedig $\lambda_{\min} = 2\Delta x$. Az L csőhosszat N részre osztjuk, egy rész hossza $\Delta x = L/N$. Az ezeknek a hullámoknak megfelelő $k = 2\pi/\lambda$ hullámszámok:

$$k_{\min} = \frac{2\pi}{2L} = \frac{\pi}{L}; \quad k_{\max} = \frac{2\pi}{2\Delta x} = \frac{\pi}{\Delta x} = \frac{\pi}{L/N} = N \frac{\pi}{L} = N \cdot k_{\min}.$$

Az n -edik időlépésben a hiba, mint a hely periodikus függvénye komplex alakban Fourier sorral az alábbi módon írható fel – az imaginárius egység $j = \sqrt{-1}$:

$$\varepsilon^n(x_i) = \sum_{v=-N}^N E_v^n e^{j \cdot k_v \cdot x} = \varepsilon^n(i \cdot \Delta x) = \sum_{v=-N}^N E_v^n e^{j \cdot k_v \cdot i \Delta x}.$$

Látszik, hogy a v -edik hullám hullámszáma $k_v = v \cdot \pi / L$, így a fenti képletbeli kitevőben szereplő $k_v \Delta x = v \cdot \pi / L \cdot (L/N) = v \cdot \pi / N = \Phi$, a π szög v/N -ed része. Ezt visszaírva a fenti képletbe

$$\varepsilon^n(x_i) = \sum_{v=-N}^N E_v^n e^{j k_v \cdot i \Delta x} = \sum_{v=-N}^N E_v^n e^{j \cdot i \cdot \Phi}.$$

Írjuk ezt az összefüggést a megfelelő indexekkel vissza a hibaegyenletbe. Miután véges összegekről van szó, elegendő azok egyetlen tagját leírni, mert az ugyanúgy terjed a hely és idő függvényében, mint a teljes hiba. Ha ezek után a v indexet el is hagyjuk, kapjuk, hogy

$$E^{n+1} e^{j i \Phi} = \frac{\sigma}{2} E^n e^{j(i-1)\Phi} + E^n e^{j i \Phi} - \frac{\sigma}{2} E^n e^{j(i+1)\Phi} = E^n e^{j i \Phi} \left(\frac{\sigma}{2} e^{-j\Phi} + 1 - \frac{\sigma}{2} e^{j\Phi} \right).$$

Egyszerűsíthetünk az exponenciális függvénnyel és végigosztunk E^n -nel, akkor megkapjuk a komplex erősítési viszonyt:

$$G = \frac{E^{n+1}}{E^n} = \frac{\sigma}{2} e^{-j\Phi} + 1 - \frac{\sigma}{2} e^{j\Phi} = 1 + \frac{\sigma}{2} (e^{-j\Phi} - e^{j\Phi}).$$

A komplex számok exponenciális alakja átírható trigonometrikus formába: $e^{j\Phi} = \cos \Phi + j \sin \Phi$; $e^{-j\Phi} = \cos \Phi - j \sin \Phi$, ezekkel a zárójeles kifejezés $-2j \sin \Phi$, végül $G = 1 - j \sigma \sin \Phi$. Ennek a komplex számnak az abszolút értéke a valós és a képzetes részek négyzetösszegének négyzetgyöke:

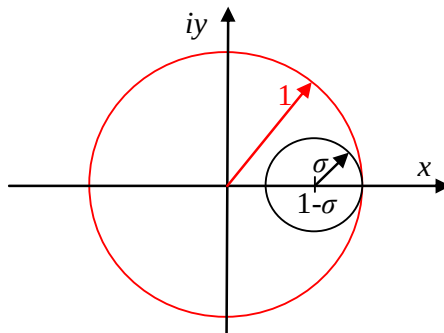
$$|G| = \sqrt{(1^2 + \sigma^2 \sin^2 \Phi)} \geq 1. \quad (10)$$

Ezzel beláttuk, hogy a diffúzió nélküli, tisztán konvektív transzportegyenletre felírt FTCS séma feltétel nélkül instabilis.

Az upwind séma fent leírt $\frac{C_i^{n+1} - C_i^n}{\Delta t} + u \frac{C_i^n - C_{i-1}^n}{\Delta x} = 0$ egyenlete átalakítás után $C_i^{n+1} = (1 - \sigma) C_i^n + \sigma C_{i-1}^n$. A hibaegyenlet amplitúdójára vonatkozó megfelelő egyenlet $E^{n+1} = (1 - \sigma) E^n + \sigma E^n e^{-j\Phi}$, így a komplex erősítés

$$G = (1 - \sigma) + \sigma e^{-j\Phi} = 1 - \sigma + \sigma \cos \Phi - j \sigma \sin \Phi.$$

Innen $|G|^2 = (1 - \sigma + \sigma \cos \Phi)^2 + (\sigma \sin \Phi)^2$. Mivel G egy a komplex síkon felírt $1 - \sigma$ középpontú σ sugarú kör, így akkor lesz G abszolút értéke egynél kisebb, ha ez a kör az egységkör belsejében fekszik, ennek pedig $\sigma < 1$ a feltétele. Ez a Courant-Friedrichs-Lewy kritérium, σ neve pedig Courant-szám.



Hasonló módon, de az eddigieknél lényegesen több számolással adódik a konvekciós-diffúziós egyenletre felírt FTCS séma stabilitásának feltétele, $\beta \leq \frac{1}{2}$ és $\frac{\sigma^2}{\beta} \leq 2$, amiből végül:

$$\Delta t \leq \min \left\{ \frac{2\alpha}{u^2}; \frac{\Delta x^2}{2\alpha} \right\}.$$